

비동질 반무한 평면의 해석을 위한 비례경계요소법의 유도

딸기아빠¹ Bald Guy²

¹정회원, 목포는 항구다.

²University of Kangaroo

2006년 10월 13일



목 차

- 1 비례경계유한요소법
- 2 비동질반평면에서의 비례경계 유한요소법의 유도
- 3 수치예제
- 4 결론



목 차

- 1 비례경계유한요소법
- 2 비동질반평면에서의 비례경계 유한요소법의 유도
- 3 수치예제
- 4 결론



개요

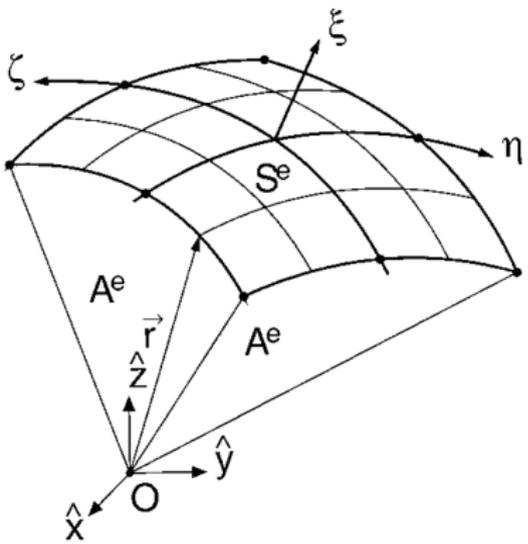
비례경계유한요소법(Scaled boundary finite element method; SBFEM)이란?

- 1996년 John P. Wolf와 C. Song에 의해서 개발
- 해석영역(Analysis domain)을 비례경계좌표계(Scaled boundary coordinate)로 치환
- 유한요소법과 경계요소법의 특성결합
- 무한영역의 처리에 강점
- “유한요소법에 기초를 둔 기본해가 필요없는 준해석적인 경계요소법”



비례경계변환 I

- 비례경계변환의 좌표



비례경계변환 II

- 임의의 공간을 경계방향(circunferential direction)의 좌표 η, ζ 와 반지름방향(radial direction)의 좌표 ξ 로 표시
- 반지름방향의 기준이 되는 좌표($\xi = 0$)를 비례중심(scaling center)라 함.
- 경계는 $\xi = 1$ 로 고정된 값을 가짐
- 임의점의 좌표는 경계의 비례(scaling)로 나타냄

$$\hat{x}(\xi, \eta, \zeta) = \xi x(\eta, \zeta) = \xi [N(\eta, \zeta)] \{x\}$$

$$\hat{y}(\xi, \eta, \zeta) = \xi y(\eta, \zeta) = \xi [N(\eta, \zeta)] \{y\}$$

$$\hat{z}(\xi, \eta, \zeta) = \xi z(\eta, \zeta) = \xi [N(\eta, \zeta)] \{z\}$$



비례경계변환 III

- 경계방향은 일반적인 유한요소로 보간 반지름방향은 해석적인 좌표로 나타냄
- 경계의 단부에 해당하는 면(side face)은 보간되지 않음.



비례경계유한 요소법의 연구현황

- 초기에는 동적-지반구조물 상호작용해석에 중점.
- 이후 다양한 영역의 해석에 적용시도.
- 적응적해석, 유사경계의 해석, 균열해석등에 적용
- 무한영역과 정밀한 유한영역의 해석에 장점을 가짐



비동질반무한공간(nonhomogeneous half space)

- 깊이에 따라 강도가 변하는 영역
- 퇴적층과 같은 지반의 특성
- 축대칭영역에 대해서는 Doherty등이 연구(2003)
- 본 연구에서 공학적으로 실용성이 높은 반무한평면에 대한 관련식을 유도



목 차

- 1 비례경계유한요소법
- 2 비동질반평면에서의 비례경계 유한요소법의 유도
- 3 수치예제
- 4 결론



비동질반평면에서의 물성치 I

- 깊이에 따라 탄성계수가 지수함수로 변하는 영역을 가정

$$E = m_E y^\alpha$$

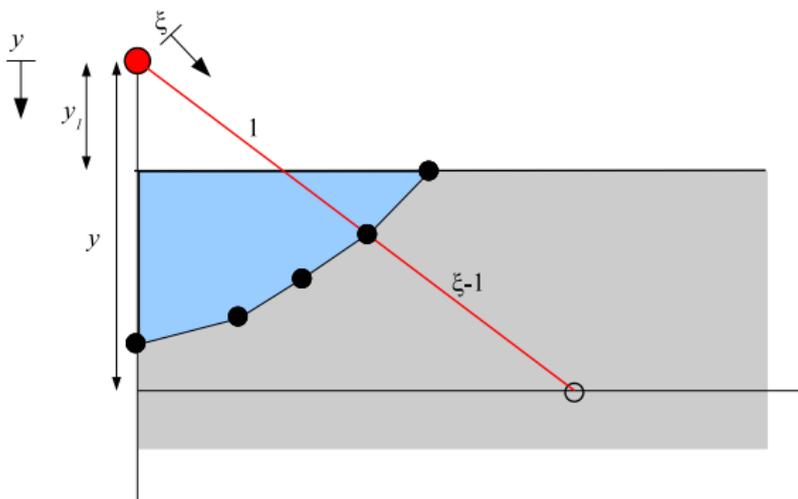
$$E(\xi, s) = m_E (\xi y(s))^\alpha = m_E \xi^\alpha (y(s))^\alpha$$



비동질반평면에서의 물성치 II

- 임의깊이에서 ξ 값에 독립적인 탄성계수표현가능

$$E = m_E \xi^\alpha \left(\frac{y}{\xi} \right)^\alpha = m_E y^\alpha$$



관련식의 유도 I

- 탄성영역에서의 응력

$$\begin{aligned}\{\sigma_h(\xi, s)\} &= [D(s)]\xi^\alpha \{\epsilon_h(\xi)\} \\ &= [D(s)]\xi^\alpha \{[B^1(s)]\{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[B^2(s)]\{u_h(\xi)\}\}\end{aligned}$$

- 가상변형률

$$\{\delta\epsilon(\xi, s)\} = \{[B^1(s)]\{\delta u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[B^2(s)]\{\delta u(\xi)\}\}$$



관련식의 유도 II

- 가상일의 원리적용(측면하중과 체적력무시)

$$\int_V \{\delta \epsilon(\xi, s)\}^T \{\sigma_h(\xi, s)\} dV - \int_S \{\delta u(s)\}^T \{t(s)\} ds = 0$$

- 해석영역의 내부일

$$\begin{aligned} & \int_V \{\delta \epsilon(\xi, s)\}^T \{\sigma_h(\xi, s)\} dV \\ &= \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}_{,\xi}^T \left[\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\} \right] d\xi \\ &+ \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[\xi^\alpha [E^1] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \xi^{\alpha-1} [E^2] \{u_h(\xi)\} \right] d\xi \end{aligned}$$



관련식의 유도 III

여기서 계수행렬은

$$[E^0] = \int_s [B^1(s)]^T D(s) [B^1(s)] |J| ds$$

$$[E^1] = \int_s [B^2(s)]^T D(s) [B^1(s)] |J| ds$$

$$[E^2] = \int_s [B^2(s)]^T D(s) [B^2(s)] |J| ds$$



관련식의 유도 IV

- $\{\delta u(\xi)\}_{,\xi}^T$ 을 포함하는 항에 대한 부분적분

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}_{,\xi}^T \left[\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\} \right] d\xi \\
 &= \{\delta u\}^T \left[[E^0] \{u_h\}_{,\xi} + [E^1]^T \{u_h\} \right] \\
 & - \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} + (\alpha+1)\xi^\alpha [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} \right] d\xi \\
 & - \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[\xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \alpha\xi^{\alpha-1} [E^1]^T \{u_h(\xi)\} \right] d\xi
 \end{aligned}$$



관련식의 유도 V

- 외부일에 대한 항

$$\int_s \{\delta u(s)\}^T \{t(s)\} ds = \{\delta u\}^T \int_s \{N(s)\}^T \{t(s)\} ds$$

- 가상일의 원리를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \{\delta u\}^T \left[[E^0] \{u_h\}_{,\xi} + [E^1]^T \{u_h\} \right] - \{\delta u\}^T \{P\} \\ & + \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[-\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} - (\alpha+1)\xi^\alpha [E^0] - \{u_h(\xi)\}_{,\xi} \right. \\ & \quad \left. - \xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\}_{,\xi} - \alpha\xi^{\alpha-1} [E^1]^T \{u_h(\xi)\} + \xi^\alpha [E^1] \{u_h(\xi)\} \right. \\ & \quad \left. + \xi^{\alpha-1} [E^2] \{u_h(\xi)\} \right] d\xi = 0 \end{aligned}$$



관련식의 유도 VI

- 비동질반무한 평면에 대한 SBFEM의 기본식

$$\{P\} = \left[[E^0]\{u_h\}_{,\xi} + [E^1]^T\{u_h\} \right]$$

$$\begin{aligned} & \xi^{\alpha+1}[E^0]\{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} \\ & + [(\alpha + 1)[E^0] + [E^1]^T - [E^1]]\xi^\alpha\{u_h(\xi)\}_{,\xi} \\ & + [\alpha[E^1]^T - [E^2]]\xi^{\alpha-1} = 0 \end{aligned}$$

- 측변하중을 고려하는 경우

$$\begin{aligned} & \xi^{\alpha+2}[E^0]\{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} + \xi^{\alpha+1}[(\alpha + 1)[E^0] + [E^1]^T - [E^1]]\{u_h(\xi)\}_{,\xi} \\ & + \xi^\alpha[\alpha[E^1]^T - [E^2]]\{u_h(\xi)\} + \xi\{F_t(\xi)\} = 0 \end{aligned}$$



해의 산정 I

- SBFEM의 일반해

$$\{u_h(\xi)\} = c_1 \xi^{-\lambda_1} \{\phi_1\} + c_2 \xi^{-\lambda_2} \{\phi_2\} + \dots$$

여기서

- c_i 는 각각의 변형모드가 기여도
- λ_i 는 절점변위모드의 형상지수
- 특성방정식

$$\{q_i\} = [[E^1]^T - \lambda_i [E^0]] \{\phi_i\}$$



해의 산정 II

- 1차 고유치문제로 전환($2n$ 개의 자유도)

$$\begin{bmatrix} [E^0]^{-1}[E^1]^T & -[E^0]^{-1} \\ [E^1][E^0]^{-1}[E^1]^T - [E^2] & \alpha[I] - [E^1][E^0]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ q \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \phi \\ q \end{Bmatrix}$$

- 측면하중에 대한 변위모드

$$\begin{aligned} \{\phi_t\} = & [(t+1)(t-\alpha+1)[E^0] - (t-\alpha+1)[E^1] \\ & + (t+1)[E^1]^T - [E^2]]^{-1} \{-F_t\} \end{aligned}$$



해의 산정 III

- 최종변위

$$\{u_h(\xi, s)\} = [N(s)] \left(\xi^{t-\alpha+1} \{\phi_t\} + \sum_{i=1}^n c_i \xi^{-\lambda_i} \{\phi_i\} \right)$$

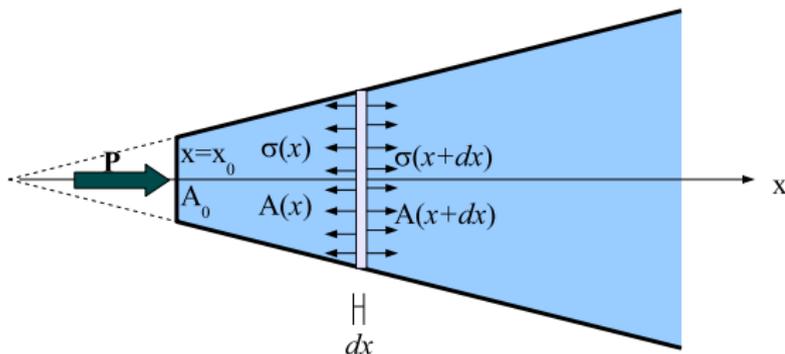
- 최종응력

$$\begin{aligned} \{\sigma_h(\xi, s)\} = & [D(s)] \xi^t [(t - \alpha + 1)[B^1(s)] + [B^2(s)]] \{\phi_t\} \\ & + [D(s)] \sum_{i=1}^n c_i \xi^{\alpha-\lambda_i-1} [-\lambda_i [B^1(s)] + [B^2(s)]] \{\phi_i\} \end{aligned}$$



Log Mode의 고려 I

- 단면이 변하는 무한길이봉



- $A(x) = A_0(x/x_0)^n$
- $E(x) = m_E \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha$



Log Mode의 고려 II

- 미소두께 dx 에서의 평형방정식

$$\sigma(x)_{,x}A(x)dx + \sigma(x)A(x)_{,x}dx + \sigma(x)_{,x}A(x)_{,x}dx^2 = 0$$

- 고차항의 생략 및 정리

$$x^2 u(x)_{,xx} + (n + \alpha)u(x)_{,x} = 0$$

- $\xi = \frac{x}{x_0}$ 를 대입

$$\xi^2 u(\xi)_{,\xi\xi} + (n + \alpha)\xi u(\xi)_{,\xi} = 0$$



Log Mode의 고려 III

- 경계조건의 대입

$$P = -\sigma(x_0)A(x_0) = \frac{m_E A_0}{x_0} u(\xi = 1), \xi$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = 0$$

- Euler-Cauchy방정식

$$u(\xi) = \Phi \xi^\lambda + a$$

- Euler-Cauchy방정식의 해

$$\Phi = \frac{-x_0 P}{(1 - (n + \alpha)) m_E A_0}$$



Log Mode의 고려 IV

- 동질평면문제($n = 1, \alpha = 0$)인 경우 특수한 해가 필요 \rightarrow Log mode
- 비동질평면에서는 Euler-Cauchy해를 그대로 적용가능, Log mode 불필요



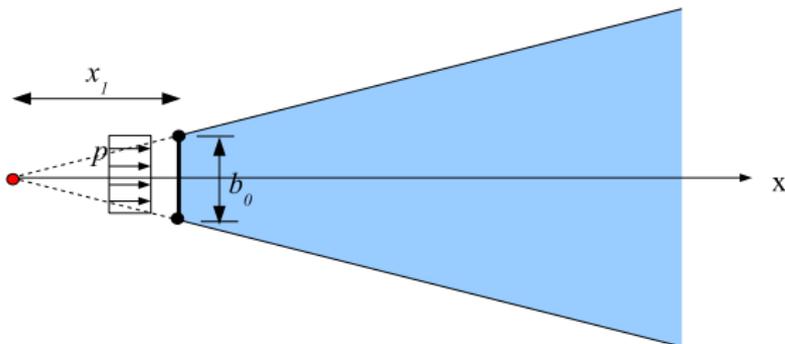
목 차

- 1 비례경계유한요소법
- 2 비동질반평면에서의 비례경계 유한요소법의 유도
- 3 수치예제
- 4 결론



변단면 무한봉 I

- 변단면 무한봉의 모델링
 - $x_1 = 1, b_0 = 1, p = -1, m_E = 100, \nu = 0.3$
 - 2개절점, 1개요소로 모델링



변단면 무한봉 II

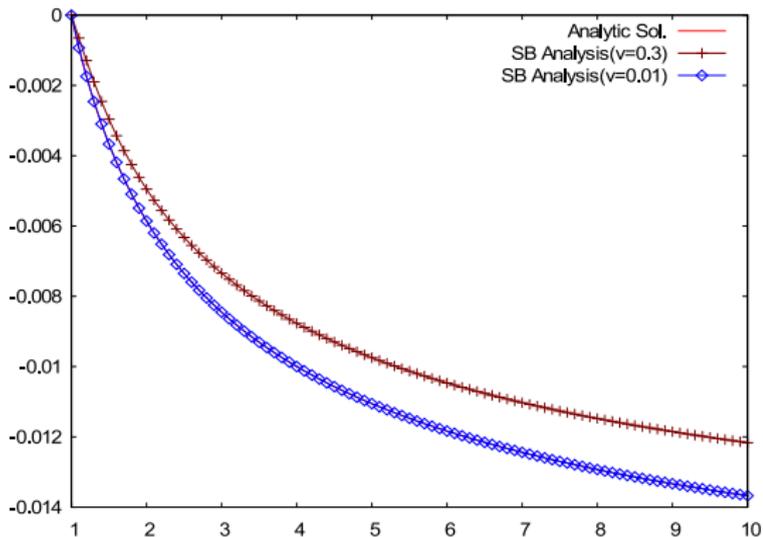
고유치 해석결과

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
고유치	6.2374	1.5	0.5	0.5
1-x	-5.321E-05	6.020E-18	2.618E-03	1.544E-02
1-y	3.872E-04	-8.027E-18	-1.533E-02	1.346E-02
2-x	-5.321E-05	-6.020E-18	-2.717E-03	2.078E-02
2-y	-3.872E-04	-8.027E-18	-1.534E-02	1.721E-02



변단면 무한봉 III

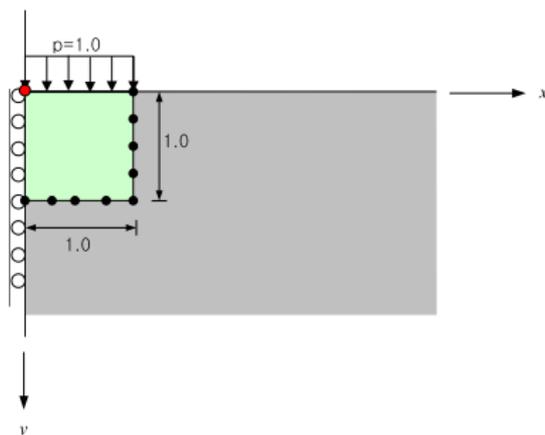
● 무한봉의 축방향변형



반무한 평면에 매입된 기초 I

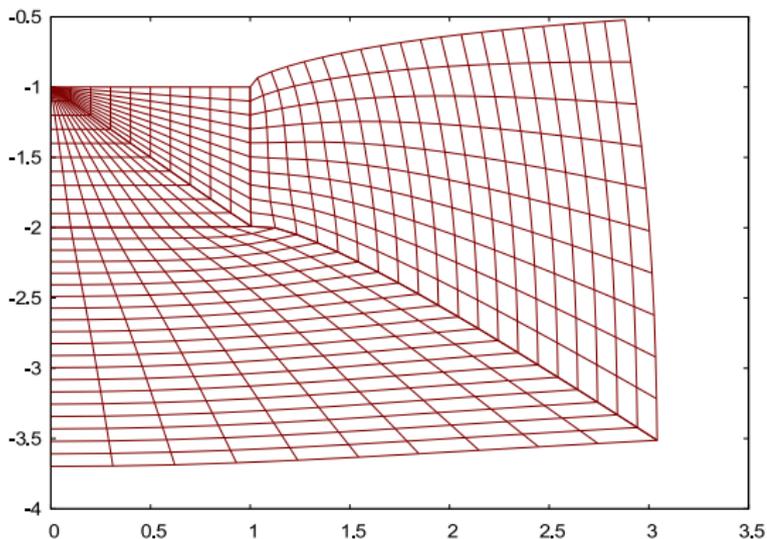
● 매입기초의 모델링

- 기초 물성치 : $E = 10000$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0$
- 지반 물성치 : $E = 100$, $\nu = 0.3$, $\alpha = ?$
- 1/2모델, 유한영역의 측변하중으로 강제변위



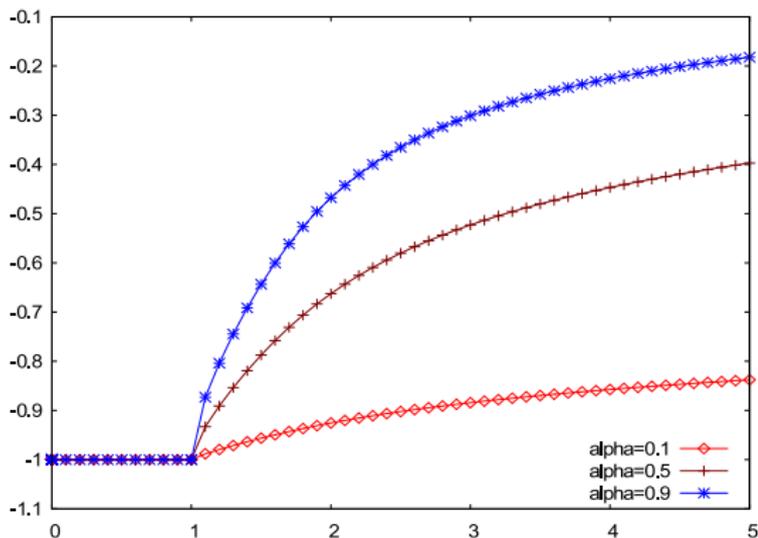
반무한 평면에 매입된 기초 II

- 변형형상



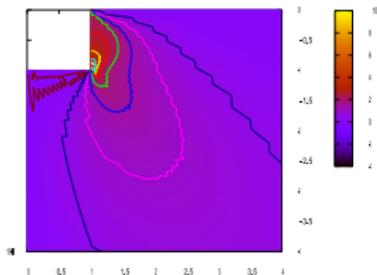
반무한 평면에 매입된 기초 III

● 지표면 변형의 비교

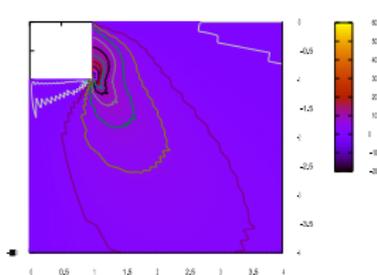


반무한 평면에 매입된 기초 IV

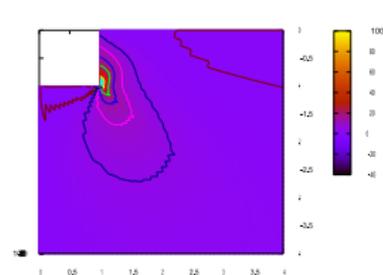
● 지반응력



$\alpha = 0.1$



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 0.9$



목 차

- 1 비례경계유한요소법
- 2 비동질반평면에서의 비례경계 유한요소법의 유도
- 3 수치예제
- 4 결론



결론

- 반무한 비동질 지반에 대한 비례경계유한요소법의 유도
- 수치예제를 통한 검증
- 적용분야의 확대를 위한 연구가 필요

