수학교과교육론

강의록 및 연습문제

2006년 1학기

한국외국어대학교 수학과

참 고 문 헌

1. 황혜정 외, 수학교육학신론, 문음사, 2001. (주교재)
2. 강옥기, 수학과 학습지도와 평가론 제2판, 경문사, 2003. (부교재)
3. L. Resnick and W. Ford, 구광조 외 역, 수학학습심리학 개정판, 교우사, 2004.
4. 김응태 외, 수학교육학 개론 제2증보, 서울대학교 출판부, 2001.
5. 우정호, 수학 학습 - 지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부, 2000. (부교재)
6. 신동선, 류희찬, 수학교육과 컴퓨터, 경문사, 1998.
7. 신현성, 김경희, 수학적 문제해결, 경문사, 1999.
8. 임정대, 수학기초론의 이해, 청문각, 2003.
9. 제7차 수학과 교육과정 요약

과 제 물

제 2장 수학교육의 필요성 및 목적

- **읽을 내용 :** [1] 2장.

- **제1절 수학교육의 필요성**

1. 수학교육의 필요성을 인지해야 하는 이유
2. 7차 교육과정에서 설정한 수학교과목의 성격
3. 자유민주주의 사회의 이념 구현
4. NCTM에서 규정한 수학교육의 필요성
5. NCTM에서 규정한 수학교육의 목표

- **제2절 수학교육의 목표**

1. 정신도야성
   (a) 수학적 추론 과정이 포함하고 있는 정신적 능력의 훈련에 적합한 요인
   (b) 페스탈로치의 고찰
   (c) 정신 도야재로서의 수학교육
2. 실용성
   (a) '실용성'에 대한 소극적 의미
   (b) '실용성'에 대한 적극적 의미
3. 문화적 가치 및 심미성
   (a) 문화적 가치의 의미
   (b) 심미성의 의미 및 예
   (c) 수학을 통하여 현상을 바라보는 안목

2장 연습문제

1. 7차 교육과정에서는 수학을 어떤 교과로 설정하고 있는가?

   7차 교육과정에서는 수학을 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과로 설정하고 있다.

2. 수학교육의 목적을 3가지로 간단히 설명하여라. ('98. #1)

   (1) 수학의 정신도야성 - 수학을 배움으로써 합리적이고 논리적인 사고력, 추상적 사고력, 창의적 사고력, 비판적 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등과 같은 정신능력을 신장시킬 수 있다.

   (2) 수학의 실용성 - 수학을 배우면 기본적으로 사회생활을 하는데에 도움이 되며, 과학 기술의 발달과 더불어 수학을 필요로 하는 과학이나 다른 학문분야를 장차 공부하는데 도움이 된다.

   (3) 수학의 문화적 가치 및 심미성 - 수학을 배움으로써 인류가 오래전부터 오늘날까지 꾸준히 구축해 온 수학이라는 학문을 하나의 문화로 받아들이고 이를 계승해 나갈 가치가 있음을 인식할 수 있다. 또한, 수학을 배움으로써 기하학적 도형이나 황금분할 등의 수학적 대상이 아름답고 수학의 공식이나 방법이 논리적으로 조화되어 의미있는 결과를 이끌어내는 것이 매우 아름답다는 것을 깨달을 수 있다.

3. NCTM에서는 수학교육의 필요성을 어떻게 설명하고 있는가?

   21세기 자유민주주의 체재하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 수학교육이 필요하다.

4. 1989년 NCTM의 '학교 수학의 교육과정과 평가의 규준'에서 설정한 학생들을 위한 수학 학습의 새로운 목적 5가지에 대하여 설명하라.

5. 수학적 추론 과정이 포함하고 있는 정신적 능력의 훈련에 적합한 요인을 4가지로 설명하여라.

6. 페스탈로치는 수학교육을 도야적 측면에서 어떻게 고찰하였는지 3가지로 설명하여라.

제 3장 수학교육의 발달

- **읽을 내용 :** [1] 3장.

- **제1절 수학교육 근대화 운동**

1. 수학교육 근대화 운동의 배경
2. Euclid 원론(Elements) - 이집트의 자연환경으로부터 발달하기 시작한 측량술을 그리스의 Thales가 배우고 돌아가 이를 이론적으로 연구하기에 이르렀고, 이것이 오늘날 기하학의 효시가 되었다. Thales이후 약 300년 사이에 여러 학자들에 의해 발전된 지식을 Euclid가 연역적 체계로 구성한 책이 13권으로 이루어진 Euclid의 원론이다.
3. Euclid 원론에 대한 비판
4. Perry의 수학교육 근대화 운동
5. Klein의 수학교육 근대화 운동
6. Moore의 수학교육 근대화 운동
7. 수학교육 근대화 운동의 의미

- **제2절 수학교육 현대화 운동**

1. 수학교육 현대화 운동의 요인 - 4가지
2. 수학교육 현대화 운동의 방향 - 5가지
3. 수학교육 현대화 운동의 비판
   (a) 수학교육 현대화 운동의 비판
   (b) Klein의 주장
   (c) 기본으로 돌아가기 운동
   (d) NCTM의 '1980년대의 학교수학을 위한 제안'

3장 연습문제

1. 수학교육 근대화 운동의 배경에 대하여 간단히 설명하여라.
2. 수학교육 근대화 운동의 의의를 4가지로 간단히 설명하여라.
3. 수학교육 근대화 운동의 시기에 Perry, Klein, Moore 등의 수학교육자들의 '유클리드 원론'에 대한 관점을 설명하여라. ('02. #3)
   (1) 지나치게 엄밀하고 형식적인 논리 전개만을 중요하게 여겨서 이해하기가 어렵다.
   (2) 수학의 실용적인 측면을 다룬 내용을 배제하여 실제적인 응용이 어렵다.
   (3) 수학의 귀납적인 면을 무시하고 수학의 연역적인 전개만을 강조하였다.
4. 수학교육 현대화 운동의 배경을 4가지로 설명하여라.
5. 수학교육 현대화 운동에서 Dieudonné의 제안은 무엇인지 4가지로 설명하여라.
6. 수학교육 현대화 운동에서 수학교수 방법상의 변화는 무엇인지 설명하여라.
7. 수학교육 현대화 운동은 우리나라의 몇 차 교육과정에 영향을 주었는가?
8. 수학교육 현대화 운동에 대한 비판을 간단히 정리하여라.
   (1) 학생들의 지적 발달 단계와 부합하지 못한 조급한 추상화와 형식화를 시도하였다.
   (2) 논리적 엄밀성과 연역적 추론이 지나치게 강조되어 이해하기가 어려웠다.
   (3) 수학자가 현대화 운동을 이끌어 수학교육학적으로 취약한 부분이 많았다.
   (4) 교사 재교육에 대한 충분한 지원이 없었다.
9. 기본으로 돌아가기 운동의 배경을 수학교육 현대화 운동으로 나타난 현상과 연관시켜 간단히 설명하여라.
10. 기본으로 돌아가기 운동에서 나타난 수학의 기본기능(basic skill)에 대한 관점은 무엇인가?
11. 수학의 기본기능(basic skill)으로 제시된 10가지는 무엇인지 설명하여라.
12. NCTM이 제시한 '1980년대의 학교 수학을 위한 제안'은 무엇인지 설명하여라. 또, 이 제안의 핵심은 무엇인가?

제 4장 우리나라 수학과 교육과정

- **읽을 내용 :** [1] 4장, [7] 1장 3절, [9].
- **제1절 교수요목기 - 제6차 수학과 교육과정기**
- **제2절 제7차 수학과 교육과정기 [9]**

4장 연습문제

1. 1차 교육과정의 특징을 간단히 설명하여라.

    (1) Dewey의 실용주의 사상의 영향을 받아 실용성이 강조되었다.
    (2) 사회적, 경제적, 문화적 생활과 관련된 상황과 문제를 수학적으로 해결하려는 경험 중심 교육과정을 구성하였다.
    (3) 이 시기의 교육 과정을 ‘생활 단원 학습기’라고도 한다.
    (4) 수학용어의 한글화를 시도하였는데, 현재까지 사용되는 것은 ‘평행사변형’, ‘사다리꼴’등이 있다.

2. 2차 교육과정의 특징을 간단히 설명하여라.

    (1) 수학 본연의 계통과 이론적 계열성을 강조하는 교과 중심 교육과정이다.
    (2) 기초 학력배양에 힘썼다.

3. 3차 교육과정의 특징을 간단히 설명하여라.

    (1) 학문 중심 교육 과정에 따른 ‘새수학’ 운동(수학교육 현대화 운동)의 영향을 많이 받았다.
    (2) 수학적 구조와 엄밀성 강조되었다.
    (3) 현대수학과 응용수학의 내용이 비교적 조기에 도입되었다.
    (4) 현대수학의 발전에 따라 교재를 재구성하였다.
    (5) 집합 개념을 토대로 하여 수학 내용을 전개하였다.

4. 4차 교육과정의 특징을 간단히 설명하여라.

    (1) 수학교육 현대화 운동의 비판과 반성으로 발생한 ‘기본으로 돌아가기’ 운동의 정신을 반영하였다.
    (2) 수학의 기본 개념과 기본 기능을 강조하였다.
    (3) 문제 해결력을 신장시키는 수학교육을 지향하였다.
    (4) 지나치게 수준이 높았던 내용을 삭제하거나 경감하여 학생들의 학습부담을 줄였다.
    (5) 학생들의 지적 발달 수준에 적절하게 학습 내용을 재조직하였다.

5. 5차 교육과정의 특징을 간단히 설명하여라.

    (1) 문제 해결력의 신장을 강조하였다.
    (2) 최소의 필수 기본 지식 및 기능을 정선하였다.
    (3) 정의적 측면을 강조하였다.
    (4) 결과로서의 지식뿐만 아니라 그에 이르는 과정으로서의 수학적 활동을 중시하였다.

6. 6차 교육과정의 특징을 간단히 설명하여라.

    (1) 제5차 교육과정에서 강조하였던 문제 해결력에 대하여 그 전략이나 방법 등을 명시함으로써 보다 구체화하였다.
    (2) 다양한 교수·학습 및 평가 방법 권장하였다.
    (3) 계산기와 컴퓨터 활용 권장하였다.
    (4) 범국민적 기초 소양으로서의 수학 교육을 강조하였다.

7. 7차 수학과 교육과정의 목표 3가지를 설명하여라. ('99. 추가 #1, '02. #2)

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.

(1) 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

(2) 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

(3) 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

8. 7차 교육과정의 수준별 교육과정에서 수학과에 대한 국민 공통 기본 교육과정 및 선택중심 교육과정에 대하여 설명하여라. ('99. #1-2)

수학은 교과의 내용 요소간의 위계가 비교적 분명하고 교수·학습 과정에서 학습자의 이전 학습에서의 결손이 이후 학습에 큰 영향을 미칠 수 있기 때문에 국민 공통 기본 교육과정으로「단계형 보충과정을 1학년(초1)부터 10학년(고1) 까지 실시한다.
선택중심 교육과정은 고등학교2,3학년에 실시하는데, 일반 선택과목은 [실용수학], 심화 선택 과목은 [수학 I], [수학II], [미분과 적분], [확률과 통계], [이산수학] 이상 6가지의 과목이 있다.

9. 7차 교육과정에서 1단계부터 10단계까지 공통된 영역구분 6가지가 무엇인지 설명하고, 각 영역의 세부내용 항목 및 학습목표에 대하여 설명하여라. ('04. #2-1)

제7차 교육과정의 1단계부터 10단계 수학을 '수와 연산', '문자와 식', '규칙성과 함수', '확률과 통계', '도형', '측정'의 공통된 6가지 영역 구분을 하고 내용을 체계화 시켰다. 각 영역의 세부내용 항목 및 학습목표는 다음과 같다.

(1) 수와 연산 : 자연수, 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙연산

(2) 도형 : 평면도형과 입체도형의 개념과 성질

(3) 측정 : 길이, 시간, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피, 삼각비의 개념과 활용

(4) 확률과 통계 : 경우의 수를 바탕으로 확률의 의미 이해 및 자료의 정리와 표현

(5) 문자와 식 : 문자의 사용, 식의 계산, 방정식, 부등식

(6) 규칙성과 함수 : 규칙찾기와 대응관계, 일차함수, 이차함수, 유리함수와 무리함수, 삼각함수에 관한 기초 개념과 문제 해결 방법

10. 7차 교육과정에서 나타난 교육과정 목표와 진술방식의 변화에 대하여 간단히 설명하여라.

(1) 교육과정 목표
6차 교육과정은「교사 중심표현을 사용한 반면에 7차 교육과정은「학습자 중심-행동 중심의 표현을 사용하고 있다. 예를 들어 6차 교육과정에서는 "삼각형의 합동 조건을 이용하여 간단하게 도형의 성질을 증명하게 한다."의 표현을 사용하였으나, 7차 교육과정에서는 "삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형에 관한 간단한 성질을 증명할 수 있다."와 같은 표현을 사용한다.

(2) 진술방식의 변화
6차 교육과정에서는 필수적인 요소만 제시한 반면에 7차 교육과정에서는 좀더 상세화하여 '내용+행동'형식의 성취 기준 중심으로 제시하였다. 예를 들어 6차 교육과정에서는 "역, 이, 대우", "필요조건, 충분조건"와 같이 내용 진술을 하였으나, 7차 교육과정에서는 "명제의 역, 이, 대우를 이해한다.", " 필요조건과 충분조건을 이해하고, 이를 구할 수 있다."와 같이 내용 진술을 하였다.

11. 7차 교육과정에서 계산기, 컴퓨터의 활용에 대한 입장이 무엇이지 간단히 설명하여라. ('00. #1-1)

계산 능력이 중요시되지 않는 문제해결에는 계산기나 컴퓨터를 활용할 수 있도록 권장하고 있다. 즉 연산 수행 능력과 같은 기초 기능의 습득을 방해하지 않는 범위 내에서 적절하게 계산기와 컴퓨터를 활용하여, 보다 중요한 수학적 사고 능력이 개발이 이루어질 수 있도록 유도하고 있다.

12. 학습내용의 적정화와 관련하여 4차 교육과정부터 이어져 온 경향은 무엇인지 그 배경을 수학교육 발달사와 비교하여 간단히 설명하여라. 또한, 7차 교육과정에서 학습내용의 적정화는 어떻게 이루어졌는지 설명하여라. ('04. #2-3)

    수학교육 현대화 운동에 뒤이어 나타난 기본으로 돌아가기 운동의 영향을 받아 제4차 교육과정 개정 이래 일관되게 '양의 축소'와 '질의 고양'으로 이어져 왔다. 제7차 교육과정 개정 작업에서도 수학과 교육 내용 적정화와 관련하여 교육 내용의 축소는 개정의 가장 중요한 방침의 하나로 설정되었으며, 이는 주로 내용의 '약화-삭제'나 상위 학년으로의 '이동'을 중심으로 이루어 졌다.

13. 교육과정의 영역구분에 대하여 6차 교육과정과 7차 교육과정을 비교하여 설명하여라.

    제6차 교육 과정에서는 각급 학교별로 교육과정의 영역구분이 나뉘어 있었으나, 제7차 교육과정에서 국민 공통 기본 교육 과정의 수학으로 통합하는 과정에서 1단계부터 10단계까지 일관성을 유지하도록 '수와 연산', '문자와 식', '규칙성과 함수', '확률과 통계', '도형', '측정'이라는 공통의 영역 구분을 적용하고, 이에 따라 내용을 체계화시켰다.

14. 제7차 교육 과정에 명시되어 있는 평가의 특징을 설명하여라. (12, 13장 참고)

    (1) 획일적인 방식을 지양하고 수업 전개의 국면에 따라 진단, 형성, 총괄 평가를 실시한다.
    (2) 평가는 학생들의 수학 학습을 돕기 위한 것 이외에도 교사 자신의 교수·학습 방법의 개선에 활용한다.
    (3) 문제해결의 결과뿐만 아니라 과정의 평가도 강조한다.
    (4) 학생들의 수학적 성향과 같은 정의적 측면의 평가도 중요시 한다.
    (5) 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필검사, 관찰, 면담 등의 다양한 평가 방법의 활용을 권장한다.

15. 제7차 교육 과정에서는 문제 해결력과 더불어 제반 고등 사고 능력을 함께 포함하는 '수학적 힘(mathematical power)'의 신장을 그 목표로 하고 있다. 수학적 힘이란 무엇인지 설명하여라.

    수학적 힘이란 창의적 사고력, 논리적 사고력, 비판적 사고력, 문제 해결 능력, 추론 능력, 의사 소통 능력, 수학에 대한 자신감과 긍정적인 태도, 수학과 인접 학문과의 관련성 및 수학의 유용성 인식 등을 포함하는 포괄적인 개념이다.

16. 제7차 교육 과정에서는 제시하고 있는 수학과의 특성에 대하여 설명하여라.

    (1) 실용성
    (2) 추상성
    (3) 형식성
    (4) 계통성
    (5) 직관성과 논리성
    (6) 일반화와 특수화

17. 수준별 교육 과정의 의의에 대하여 설명하여라.

18. 7차 중학교 교육 과정에서 함수 개념의 도입은 어떻게 이루어지는지 설명하여라.

제 5장 외국의 수학과 교육과정

- **읽을 내용 :** [1] 5장.

- **제1절 미국의 수학과 교육과정**

1. ’Standards 1989’에서 제시한 새로운 수학적 소양을 위한 5가지 목표 (Five Goals for Mathematical Literacy)

   (1) Students learn to value mathematics. - Students should have numerous, varied learning experiences that illuminate the cultural, historical, and scientific evolution of mathematics. These experiences should be designed to evoke students’ appreciation of mathematics’ role in the development of contemporary society and to promote their understanding of relationships among the fields of mathematics and the disciplines it serves: the humanities and the physical, social, and life sciences.

   Students must recognize the varied roles played by mathematics in society, from accounting and finance to scientific research, from public policy debates to market research and political polls. Their experiences in school must bring students to believe that mathematics has value for them–so that they will have the incentive to continue studying mathematics as long as they are in school.

   (2) Students become confident in their ability to do mathematics. - Study that relates to everyday life and builds students’ sense of self-reliance will lead them to trust their thinking skills and apply their growing mathematical power. School mathematics should prompt students to realize that doing mathematics is a common, familiar human activity.

   The ability of individuals to cope with the mathematical demands of everyday life–as employees, as parents, and as citizens–depends on the attitudes toward mathematics conveyed by school experiences. Among the greatest paradoxes of our age is the spectacle of parents who recognize the importance of mathematics yet boast of their own mathematical incompetence. Mathematics can neither be learned nor used unless supported by self-confidence built on success.

   (3) Students become mathematical problem solvers. - Problem solving is the process through which students discover and apply the power and utility of mathematics. Skill in problem solving is essential to productive citizenship.

   Industry expects school graduates to be able to use a wide variety of mathematical methods to solve problems wherever they arise. Students must, therefore, experience variety in problems–variety in context, in length, in difficulty, and in methods. They must learn to formulate vague problems in a form amenable to analysis; to select appropriate strategies for solving problems; to recognize and formulate several solutions whenever that is appropriate; and to work with others in reaching consensus on solutions that are effective as well as logical.

   (4) Students learn to communicate mathematically. - To express and expand their understanding of mathematical ideas, students need to learn the symbols and terms of mathematics. This goal is best accomplished in the context of problem solving that involves students in reading, writing, and talking in the language of mathematics. As students strive to communicate their ideas, they will learn to clarify, refine and consolidate their thinking.

   Learning to read, to write, and to speak about mathematical topics is essential not only as an objective in itself–in order that knowledge learned can be effectively used–but also as a strategy for understanding. There is no better way to learn mathematics than by working in groups, by teaching mathematics to each other, by arguing about strategies, and by expressing arguments in careful written form.

(5) Students learn to reason mathematically. - Skill in making conjectures, gathering evidence, and building an argument to support a theory are fundamental to doing mathematics. Therefore, sound reasoning should be valued as much as students' ability to find correct answers.

Mathematics is, above all else, a habit of mind that helps clarify complex situations. Students must learn to gather evidence, to make conjectures, to formulate models, to invent counter-examples, and to build sound arguments. In so doing, they will develop the informed skepticism and sharp insight for which the mathematical perspective is so valued by society.

2. 'Standards 1989'의 공통 규준

3. 'Standards 2000'의 공통 규준

4. 'Standards 2000'의 학교 수학의 원리

5장 연습문제

1. 1989년 NCTM의 '학교 수학의 교육과정과 평가의 규준'(약칭 Standards)에서 학생들의 수학적 소양을 위해 설정한 5가지 목표에 대하여 설명하여라.

    (1) 평등의 원리(Equity Principle) -

    (2) 교육과정의 원리(Curriculum Principle) -

    (3) 교수의 원리(Teaching Principle) -

    (4) 학습의 원리(Learning Principle) -

    (5) 평가의 원리(Assessment Principle) -

    (6) 기술공학의 원리(Technology Principle) -

2. 1989년 NCTM의 '학교 수학의 교육과정과 평가의 규준'에서 제시된 교육과정의 규준에서 K-4부터 K-12까지의 학년급에 공통적으로 해당하는 것 4가지에 대하여 설명하여라. ('97. #1, '99. 추가 #1)

3. 학년급에 제시된 내용 영역에 대하여 'NCTM Standards 1989'와 'NCTM Standards 2000'의 차이는 무엇인지 설명하여라.

4. 'NCTM Standards 2000'에서 제시된 학교수학의 원리 6가지는 무엇인가?

5. 'NCTM Standards 2000'에서 모든 학년급에 공통인 10가지 영역은 무엇인지 수학내용에 관한 것과 방법적 지식으로 구분하여 설명하여라.

6. 'NCTM Standards 2000'과 우리 나라의 7차 교육과정의 수학의 내용 영역 구분을 비교하여 설명하여라.

제 6장 수학교육과 수리철학

- **읽을 내용 :**

1. 1절 : [1] 1장 p.31, 6장, [4] 4장 1절, [8] 1,2장.
2. 2절 : [1] 6장, [5] 8장.
3. 3절 : [1] 6장, [2] 1장 3절, [4] 4장 1절, [8] 7장 1, 5절.

- **제1절 절대주의 수리철학**

1. 플라톤주의
   (a) 이데아 - 동굴의 비유
   (b) 공리적 방법
   (c) 유클리드 원론(기원전 3세기 경) - 연역적 체계
   (d) Euclid는 '자명하다'고 믿어지는 명제 중에서 기하학 특유의 것을 공준(postulate)이라 하고, 보다 일반적인 것을 공리(axiom)이라 하였다.
   (e) 공리
      i. 같은 것들과 같은 것들은 서로 같다.
      ii. 같은 것들에 같은 것을 더하면 전체는 같다.
      iii. 같은 것들에서 같은 것을 빼면 남는 것은 서로 같다.
      iv. 서로 포개어지는 것들은 서로 같다.
      v. 전체는 부분보다 크다.
   (f) 공준
      i. 임의의 서로 다른 두 점은 직선으로 연결할 수 있다.
      ii. 직선은 무한히 연장할 수 있다.
      iii. 임의의 원을 중심으로 하고 임의의 길이를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있다.
      iv. 모든 직선은 같다.
      v. (평행선 공리) 한 평면 위의 한 직선이 그 평면 위의 두 직선과 만날 때 어느 한 쪽에서의 두 내각의 합이 2직각보다 작으면 이 두직선은 그 쪽에서 만난다.
   (g) 비 Euclid 기하학 - 평행선의 공리를 다른 공준·공리로부터 증명하려는 시도는 모두 실패로 돌아갔다. Gauss, Lobachevski, Bolyai 등은 제5공준을 새로운 공준으로 바꾸어 새로운 기하학의 체계를 구성할 수 있음을 보였다. 예를 들면, "주어진 직선 밖의 한 점을 지나 두 개 이상의 나란한 직선을 그을 수 있다."
   (h) 무정의 용어(undefined concepts) - 어떤 것을 무정의 용어로 선택하는가와 어떤 것을 공리로 선택해야 하는가 하는 것이 중요한 문제이다.
2. 수학기초론(1장 p.31)의 등장 배경
3. 논리주의(Logicism)
   (a) 논리주의의 특징
   (b) Cantor의 소박한 집합론(naive set theory) - x에 관한 임의의 조건 $P(x)$에 대하여 $P(x)$를 만족하는 x 전체의 모임인 집합 $\{x \mid P(x)\}$가 항상 존재한다.

(c) 1899년 Cantor의 역설(paradox) - 모든 집합의 집합을 A라 하면 A의 멱집합 $\mathscr{P}(A)$도 집합이므로 $\mathscr{P}(A) \subset A$이다. 따라서, $|A| < |\mathscr{P}(A)| \le |A|$이므로 모순이다.

(d) 1902년 Russell의 역설- $P(x) : x \notin x$라 하고, $A = \{x \mid x \notin x\}$라 하자. $A \in A$이면 $P(x)$의 정의에 의하여 $A \notin A$이고, 반대로 $A \notin A$이면 A의 정의에 의하여 $A \in A$이다. 이는 명백히 모순이다.

(e) 역설을 극복하도록 집합을 새로이 정의하는 것이 문제의 핵심이다.

(f) Russell의 유형론(type theory) - 먼저 기본적인 대상이 되는 종류가 하나 존재하고, 이 대상을 형(type)이 0인 대상이라고 한다. 형이 0인 대상을 원소로 하는 집합을 형이 1인 집합이라고 한다. 일반적으로 형이 n인 대상을 원소로 하는 집합을 형이 $n+1$인 집합이라고 한다. a의 형이 b의 형보다 작을 때에만이 $a \in b$가 의미가 있게 된다. 따라서, $x \in x$와 같은 명제는 무의미하다. 위의 역설은 이와 같은 형의 구별을 혼동하는 데서 비롯된다.

(g) 유형론(type theory)은 무한공리와 같이 집합론에서 받아들이기 어려운 몇 가지 문제점을 포함하고 있다. 논리주의의 시도는 성공하지 못한 것으로 평가된다.

4. 직관주의(Intuitionism)

(a) Kronecker, Brower 등

(b) 모든 인간은 자연수에 대한 직관을 가지고 있다. 즉, 1이 무엇을 뜻하는가에 대한 확실성을 가지고 있고, 여기에 1을 덧붙이는 조작으로 2의 개념을 얻는다. 이와 같은 것을 반복하면 임의의 유한한 수 $1, 2, 3, \cdots, n$을 구성할 수 있을 뿐이다.

(c) 수학은 인간의 정신과 독립적으로 존재하는 것이 아니고 인간의 정신적 활동으로 정의되어야 하며, 논리주의에서와 같이 정리의 모임으로 정의되어서는 안된다. 이러한 정신활동은 귀납적이고 완성된 상태로 나타낼 수 있는 것이어야 한다. 즉, 수학적 진리는 유한 번의 단계로 구성 가능함을 보임으로써 확립된다. 따라서, 자연수 전체는 생성되는 것이지 자연수 전체의 집합과 같은 것은 허구이다.

(d) 진리 값이 참이라 함은 그것을 확인하는 방법이 있다는 것을 의미하고, 거짓이란 그 명제로부터 모순이 있음을 증명하는 방법이 있다는 것을 의미한다. 따라서, 고전논리의 배중률은 성립하지 않는다. 즉, 어떤 것의 존재 증명은 배중률을 이용하지 않고 구성 가능함을 보여야 하는 것이다.

(e) 직관주의의 입장에서 수학을 구성하면 역설은 극복할 수 있으나, 구성적으로 얻어지는 고전 수학의 많은 부분을 잃게 된다. 예를 들면, 현대수학은 배중률의 성립을 전제로 하고 있기 때문에 이와 관련된 고전수학의 많은 지식을 포기해야 한다. 따라서, 고전수학의 입장에서 보면, 직관주의는 수학의 기초를 확립하는 데 실패하고 있다.

5. 형식주의(Formalism)

(a) 등장배경

(b) 1904년 Hilbert의 계획 - 수학을 엄밀한 방법으로 모순이 없고 완전한 공리체계로 구성하려고 시도하였다.

(c) 수학을 완전한 형식체계로 본다.

(d) 공리계의 무모순성 -

(e) 공리계의 완전성 -

(f) 1931년 Gödel의 불완전성 정리 - 무모순성과 완전성은 양립할 수 없다. 즉, 어떤 형식체계가 무모순이면 반드시 불완전할 수 밖에 없다.

- **제2절 준경험주의**

1. Popper의 비판적 오류주의(1963) - Pooper가 과학적 발견의 논리를 기술하기 위해 제기한 것이다. 과학적 지식은 추측과 반박에 의하여 성장하며, 지식은 결코 확실성을 가질 수 없으며, 단지 추측할 수 있고 추측을 개선할 수 있기 때문이다. 추측을 검사하고 추측에 대한 반박을 고려하여 추측을 강화하거나 이를 제거할 수 있는 새로운 추측을 창안하여 대체함으로써 지식의 성장이 이루어진다.
2. Lakatos의 수학적 발견의 논리(1976) - 수학적 지식에 대한 견해
3. 오류주의 수리철학 - '무한후퇴'에 대한 대안으로 제기된 것으로 수학적 지식의 확실성은 확립될 수 없고 단지 추측할 수 있으며, 이를 비판하고 개선할 수 있다.
4. 다면체에 관한 오일러의 추측
5. 증명에 대한 관점
6. 반례와 반례 제거법
7. 수학적 지식의 성장 과정 4단계 - 준경험주의
8. Lakatos가 제시한 수학적 발견의 논리가 시사하는 수학학습-지도 방법 - Lakatos는 증명과 반박을 수학적 발견의 논리로 보고 있다. 증명과 반박의 논리로 추측하고 검사하고 증명하고 반박하는 수학의 탐구과정을 통해 비판적이고 합리적인 사고 능력과 태도의 개발하도록 한다.

- **제3절 구성주의**

1. 조작적 구성주의(operational constructivism)
2. von Glassersfeld의 급진적 구성주의(radical constructivism; 1991)
3. Earnest의 사회적 구성주의(social constructivism; 1991)

6장 연습문제

1. 플라톤주의가 수학적 지식 및 수학자를 바라보는 관점과 이러한 수학관이 유클리드 원론에서 어떻게 구체화 되었는지 설명하여라.

   수학적 대상은 인간의 의식과 독립적으로 존재하며, 수학자는 이미 있는 수학적 존재의 성질을 발견한다. 이러한 수학관은 공리적으로 수학을 전개하는 방법론으로 발전하였는데, 유클리드 원론에서 정의, 공리, 공준과 같이 명확한 기초 위에 수학을 전개해 나가는 연역적 체계로 구체화 되었다.

2. 수학기초론 학파들이 생겨난 배경에 대하여 설명하여라.

3. 논리주의가 수학을 바라보는 관점은 무엇인지 설명하여라.

   수학의 모든 개념이 논리적 개념으로 환원될 수 있고, 모든 수학적 지식이 논리의 추론 규칙에 의해 증명될 수 있다고 주장하였는데, 이는 수학을 명백히 참인 순수 논리로 환원하여 수학의 확실한 기초를 확립하려고 한 것이다.

4. Cantor의 역설과 Russell의 역설이 무엇인지 설명하여라.

5. 직관주의가 수학을 바라보는 관점과 그 한계가 무엇인지 설명하여라.

   수학적 진리는 유한 번의 단계로 구성가능한 것으로서 명확한 직관적 의미를 가져야 한다고 하였다. 배중률이 직관적으로 자명하지 않은 논리이므로 성립하지 않는다고 하여 고전수학의 많은 부분을 잃게 되는 한계가 있다.

6. 형식주의가 출현하게 된 배경과 기본입장은 무엇인지 설명하여라. ('98. #5)

   논리주의에 의해 생겨난 역리와 직관주의에 의해 야기된 고전수학의 포기라는 수학적 위기를 극복하려는 시도로 형식주의가 생겨났다. 형식주의에서는 수학을 완전한 형식 체계로 보고 엄밀한 방법으로 모순이 없고 완전한 공리체계로 구성하려고 시도했다.

7. 공리계의 무모순성과 완전성이 무엇인지 설명하고, 또 Gödel의 불완전성 정리에 대하여 설명하여라.

8. Lakatos의 수학적 지식에 대한 관점에 대하여 설명하여라.

   수학적 지식은 의심의 여지없이 확실한 정리의 수가 단조롭게 늘어나면서 성장하는 것이 아니라, 증명과 반박(proof and refutation)의 논리에 의해 추측이 끊임없이 개선됨으로서 성장한다.

9. Lakatos의 증명관과 전통적인 증명관을 비교하여 설명하여라.

   Lakatos는 증명이란 추측을 의심의 여지가 없는 정리로 확립하는 과정이라는 전통적인 증명관을 부정하고, 증명을 원래의 추측을 더 많은 부분 추측으로 분해하여 비판과 반박의 시야를 넓히는 사고 실험으로 보고 있다.

10. 보조정리합체법(lemma-incorporation method)에 대하여 설명하라.

    반례가 출현하게 된 원인이 되는 부분 추측을 찾아 증명분석을 통해 숨겨져 있는 결함을 찾고, 그것을 제거할 보조정리를 찾아내어 그에 해당하는 조건을 원래의 추측에 합체시켜서 추측을 개선하는 방법이다. 이것은 수학적 지식의 성장을 위한 최선의 방법으로, 새로운 추측을 발견하는 과정과 그 추측을 증명하는 과정이 동시에 이루어진다.

11. 유클리드 원론과 Lakatos의 수학적 발견의 논리에서 정의, 정리, 증명에 대한 관점이 어떻게 다른지 설명하여라.

12. Lakatos가 제시한 수학적 지식의 성장 과정 4단계에 대하여 설명하고, 이를 토대로 준경험주의의 의미를 설명하여라. ('02. #1-3, '05. #6)

13. Lakatos가 제시한 수학적 발견의 논리가 시사하는 수학학습-지도 방법은 무엇인지 설명하여라.

14. 조작적 구성주의가 시사하는 수학교육의 방법은 무엇인지 설명하라.

수학 수업에서 수학적 지식의 발생적 근원이 되는 조작과 자신의 조작 활동을 사고의 대상으로 삼아 반성하는 활동을 강조해야 한다.

15. Glasersfeld가 제시한 급진적 구성주의 원리 세 가지에 대하여 설명하여라. ('00. #2)

    (1) 자주적 구성의 원리 -
    (2) 생장 지향성의 원리 -
    (3) 비객관성의 원리 -

16. 사회적 구성주의에서 바라본 수학적 지식의 사회적 구성과정에 대하여 설명하여라. ('06. #2)

17. 수학교육학적 구성주의의 교수·학습 원리 네 가지에 대하여 설명하라.

    (1) 학생중심적 개별화의 원리 - 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식이 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 하며, 이 과정에서 학생 개개인의 개인차를 고려해야 한다.
    (2) 발문 중심적 상호작용의 원리 - 수학교육학적 구성주의의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호작용이 매우 중요하다. 이러한 이유에서 교사가 적절한 발문을 통해 학생의 응답을 유도해 냄으로써, 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 지식을 구성할 수 있도록, 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다.
    (3) 의미지향적 활동의 원리 - 학습 내용이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 하고, 학생들이 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 의지가 수반되어야 한다.
    (4) 반영적 추상화의 원리 - 학생 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동에 의해 수학 지식의 자주적 구성이 이루어져야 한다.

제 7장 수학 학습 심리학

• **읽을 내용 :**

1. 수학학습심리학의 의미 : [3] 1장.
2. 1절 : [1] 7장 1절, [2] 2장 1절, [4] 7장 1절, [5] 7장 2절. .
3. 2절 : [1] 7장 2절, [2] 2장 2절, [4] 7장 2절, [5] 6장 1절.
4. 3절 : [1] 7장 3절, [2] 2장 5절, [4] 7장 4절, [5] 7장 4절.
5. 4절 : [1] 7장 4절, [2] 2장 3절, [4] 7장 3절, [5] 7장 3절.
6. 5절 : [2] 2장 1절, [4] 7장 1절.
7. 6절 : [2] 2장 1절, [4] 7장 1절.

• **수학학습심리학의 의미 - 이원적 지식**

1. 심리학자들이 일반적인 학습, 사고, 지능에 대하여 의문을 갖고 있는 것처럼 수학학습 심리학은 수학과 관련하여 이러한 의문에 초점을 맞추고 있다. 즉, ”사람들은 어떻게 사고하는가, 인간의 사고는 어떻게 발달하는가”와 같은 의문 대신, ”사람들은 수학에 대하여 어떻게 사고하는가, 수학적 개념에 대한 이해가 어떻게 발달하는가”와 같은 질문을 던진다. 곧, 수학학습 심리학에서는 경험과 지능이 어떻게 결합하여 수학적 능력(mathematical ability)을 형성하는지에 관심을 가지고 있다.
2. 수학자는 수학 교과 내용을 만들지만, 심리학자들은 일반적으로 인간이 어떻게 사고하는지, 학습하는지에 대하여 연구한다. 따라서, 올바른 수학학습 심리학을 위해서는 수학 교과 내용과 심리학 두 분야가 필요하다. 즉, 수학의 구조 혹은 교과 내용에 대한 지식과 인간이 어떻게 사고하고 추론하며 지적 능력을 사용하는지에 관한 지식이 필요하다.

• **제1절 피아제의 수학 학습 심리학**

1. (p.151) Piaget는 수학적 지식 및 사고의 본질을 조작(operation)이라고 보고 있으며, 그 발생 과정을 분석하여 제시하고 있다. 이는 수학적 개념이 발생된 것으로 파악하고 그 발생 과정을 학생들의 학습 과정에서 재성취하도록 하는 발생적 방법을 취하고 있다.
2. 발생적 인식론 (지능 개념의 발생적 해석)
   (a) 진화론의 영향 - 생물학적인 적응과정과 지적인 적응과정이 본질적으로 같은 것으로 보고 있다. 환경에 적응하여 살아남기 위하여 동물의 행동 변화가 오고, 이 행동 변화는 다시 그 동물의 신체적 조직과 구조의 변화를 가져온다. 마찬가지로, 어린 아이는 환경에 자신을 둘러싼 적응하기 위하여 행동을 변화시키고, 이러한 적응의 과정으로부터 인지적 조직과 구조의 변화가 일어난다.
   (b) 예 - 기린의 목 (적응, schéme, 평형화)
   (c) 지능의 발생 - 지능의 본질이며 지적인 구조의 발달을 가능하게 하는 기능적 불변체인 적응은 생물학적인 기능이다. 지능은 가장 낮은 형태의 감각-운동적 적응 양식이나 본능과 같이 타고난 행동 양식의 연속적 변화 과정이다.

(d) (p. 152) (# 1) 인간의 인지 능력은 환경과의 적응과정에서 끊임없이 일어나는 균형의 파괴에 대하여 새로운 균형화를 이루기 위해 발생·발달한다. 인지 발달은 두 가지 인지 기능, 곧 적응기능(동화와 조절)과 조직기능에 의한 인지구조의 변화이다. 즉, 인지 발달은 동화와 조절에 의한 schéme의 끊임없는 재구성 과정에 의해 이루어진다.

3. schéme

(a) (p. 151) (# 2) 인간이 환경과 상호 작용하기 위하여 개인의 지식과 행동을 재조직하는 일반적인 양식 혹은 인지구조를 의미한다. 즉, 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지 구조를 의미한다.

(b) (p. 151) schéme의 예

(c) schéme의 특징

i. schéme은 가동적이며, 고정적인 것이 아니다. 예를 들어, 물건을 잡는 schéme은 손잡이의 특성에 따라 여러 가지로 적용된다.
ii. schéme은 전체적인 인지구조 가운데 서로 관련되고 종합되어 있다. 어린 아이는 새로운 장난감에 대하여 보는 schéme, 잡는 schéme, 빠는 schéme등을 한꺼번에 적용한다.
iii. schéme은 일반화가 가능하며 분화가 가능하다. 어린 아이는 새로운 물건을 잡는 법을 배워 잡는 schéme을 분화시킨다.
iv. schéme은 경제성을 가지고 있어서 각 경우를 하나의 schéme에 종속시키려고 한다.

(d) 조작(operation) - 내면화된 가역적 행동

(e) (p. 154) 사고의 가역성

i. 아동의 사고가 가동적이 되어 머리 속에서 한 행동을 거꾸로 하여 출발점에 되돌아 올 수 있으며, 앞에서 행한 다른 행동이나 가능한 행동과 조정할 수 있는 것을 말한다.
ii. 가역성은 두 가지 형식으로 나타난다. 첫째 형식은 이미 수행한 행동을 취소하는 것이고, 둘째 형식은 상반에 의한 차이를 보정해 주는 것이다.
iii. 예 - 천칭의 한 쪽에 무게를 가해 균형이 깨질 때, 첫째 형식에 의하면 가한 무게를 제거하여 평형을 회복하게 되고, 둘째 형식에 의하면 반대편에 무게를 놓아 평형을 회복한다.

(f) (p. 158) 내면화 - 감각-운동적 수준에서의 활동이 정신적 수준에서의 지적 활동으로 바뀌게 되는 것을 말한다. 즉, 행동이 내면화 되었다는 것은 행동과 관련된 어떤 내적 구성이 이루어져 이를 통해 행동을 의식하고 그 행동을 다른 행동과 결합할 수 있게 하는 것이다.

4. (p. 152 - 156) 인지 발달 단계 이론

(a) 감각운동기(the sensory-motor period)

(b) 전조작기(the preoperational period)

(c) (# 3) 구체적 조작기(the concrete operational period)

(d) 형식적 조작기(the formal operational period)

5. 균형이론

(a) (# 3) 인간은 유전적으로 환경과 상호 작용하는 기능을 타고 나는데, 이는 내적인 '조직기능'과 환경에 대한 '적응기능'이다. 조직기능(organization)은 인지 기능의 내적 기능으로 인지 발달의 연속성 및 조직적 체계를 이루게 한다. 적응기능(adaptation)은 인지 기능의 외적 기능으로 동화와 조절의 두 가지 기능이 있다.

(b) (# 3) (p. 152) 동화(assimilation) - 기존의 인지 구조를 이용하여 주어진 대상을 해석하는 것이다. 즉, 기존의 어떤 schéme을 고수하면서 가능한 한 넓은 범위의 상황을 그에 종속시켜서 이해하려고 하는 보수적 기능으로서 기존의 인지구조에 의한 대상의 해석이다.

(c) (# 3) (p. 152) 조절(accommodation) - 당면한 문제를 해결하기 위하여 자신의 schéme을 조정·분화하는 기능이다.

(d) 예

(1) 동화 - 자연수의 덧셈을 배운 아동은 정수의 덧셈을 배울 때 자연수의 덧셈이라는 schéme으로 해석한다.

(2) 조절 - 자연수의 사칙연산을 배운 아동이 그 schéme을 정수의 사칙연산에 대한 schéme으로 분화시킨다.

(e) (p. 143, 151) 균형화 - 인간은 타고난 기본적인 schéme을 바탕으로 적응 기능에 의하여 환경과 상호 작용하는 가운데 보다 유연하게 포괄적인 인지 schéme을 구성함으로써 인지 구조를 변화시켜 나간다. 기존의 인지 구조와 반사되어 들어온 새로운 내용 사이에 인지적 불균형이 야기되는데, 동화와 조절 과정을 통해 이 불균형 상태를 벗어나 인지적 균형 상태에 이르게 되는 것을 말한다.

6. 균형화 과정 - 조작적 구성주의

(a) 지능의 발달은 주체의 능동적인 균형화 과정이다. 따라서 내면화된 능동적인 행동, 곧 조작이 지능의 본질이다.

(b) 수학의 본질은 조작적 schéme이다. 즉, 수학적 구조, 개념, 증명방법, 명제, 정리 등 모든 것이 조작적 schéme이다. 결국 수학적 활동이란 schéme을 구성하고 적용하는 것이다.

(c) (p. 142) 이러한 schéme은 논리-수학적 개념, 즉 대상으로부터의 단순 추상에 의한 정적인 이미지가 아니라, 대상에 대한 주체의 행동의 일반적인 조정으로부터 반영적 추상화에 형성된 조작적 schéme이다. 즉, 단순히 물리적 경험으로부터의 추상화가 아닌 논리-수학적 경험으로부터의 추상화를 의미한다. 일련의 행동의 이러한 schéme은 대상으로부터의 단순 추상에 의한 정적인 이미지가 아니라, 대상에 대한 주체의 행동의 일반적인 조정으로부터 반영적 추상화에 형성된 조작적 schéme이다. 모든 논리-수학적 개념은 **주체 자신에 의해서 구성된** 것이다.

(d) (p. 156 - 157) 수학의 본질은 추상화이다. 수학의 학습은 추상화 활동이 중심이 된다.

i. 경험적 추상화 - 물리적 경험으로부터의 추상화를 의미하는 것으로, 외부 대상이 갖는 성질들로부터 일반화된 지식, 혹은 공통적인 성질을 이끌어 내는 것을 말한다. 예를 들면,

ii. 반영적 추상화 - 논리-수학적 경험으로부터의 추상화, 곧 주체의 활동에 대한 일반적인 조정으로부터 이루어지는 추상화를 의미한다. 예를 들면,

iii. 의사 경험적 추상화 - 아동의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성 결과의 확인은 외부 대상에 대해서 행해지는 것을 말한다. 예를 들면,

(e) (p. 142 - 143, 157 - 159) 반영적 추상화는 반사와 반성이라는 두 가지 상보적인 과정의 나선적 교대에 의해 진행된다. 즉, 일련의 행동의 schéme이 상호 조정되어 반영적 추상화에 의하여 조작적 schéme으로 구성되고, 이렇게 구성된 schéme은 다음 단계의 조작적 schéme의 출발점이 된다.

i. 반사 - 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위 단계로 옮기는 것을 말한다. 행동의 내면화와 주제화가 일어난다.

ii. 반성 - 반사되어 들어온 내용을 기존의 인지구조에 동화하거나 기존의 인지 구조를 새로 들어온 내용에 맞추어 조절한다. 즉, 동화·조절을 통한 인지적 균형화 과정이다.
iii. 내면화 -
iv. 주제화 - 하위 단계에서 사고의 도구였던 것을 사고의 대상으로 하는 것이다.

7. (p. 143 - 144, [2] p. 10) 조작적 구성주의

8. 수학과 학습 지도 원리([2] p.27 - 28)

   (a) 전교육과정의 원리(precurriculum) - 전 조작적 단계에 있는 초등학교 입학전 아동에게는 논리-수학적 경험이 필요하다.
   (b) 활동적 학습원리 -
   (c) 통합의 원리
   (d) 조작적 원리
   (e) 발달단계에의 순응

- **제2절 브루너의 수학 학습 심리학**

1. Bruner는 저서 "The Process of Education" (1963)을 통하여 지식의 구조를 지도할 것을 주장하여 구조중심 교육과정을 내세우고 있다. 발견, 구조, 조기준비성, 직관적 사고와 같은 아이디어로 표현되는 이 저서는 1950년대 말의 수학교육 개혁운동의 정신을 잘 파악하여, '새 수학'의 이론적 배경을 제공하였다.

2. 지식의 구조

   (a) 각 학문 분야는 그 학문의 독특한 기본적인 구조를 가지고 있다는 것을 전제로 하여 교육과정은 그러한 학문의 기본 구조를 중심으로 조직되어야 한다.
   (b) (p. 161) 지식의 구조 -
   (c) (p. 161) 지식의 구조를 파악하는 것의 네 가지 이점 -
   (d) (p. 162) 지식의 구조를 가르친다는 것은 학생들로 하여금 그 지식 분야에 종사하는 학자들이 하는 일과 본질상 동일한 일을 하도록 하는 것을 의미한다.
   (e) 수학을 구조화된 교과목으로 가르친다는 것은, 각각의 명제와 절차에 대한 이유가 설명되어야 하고 개념간의 상호관계가 증명될 수 있어야 하며, 모든 개념은 이미 증명된 것을 이용하여 정당화되어야 한다는 것을 가르치는 것을 말한다. 단순히 훈련에 의한 계산 능력을 높이는 것이 아니라, 수학적 연산의 기저가 되는 이유를 제시하거나 한 연산이 다른 연산과 관련되어 있다는 개념을 명시함으로써, 학습자가 구조에 대하여 기본적인 이해를 할 수 있도록 해야 한다.
   (f) (p. 163) 지식의 구조를 지도할 수 있다는 근거

      i. Bruner의 가정 - 어떤 교과든지 지적으로 올바른 형식으로 표현하면 어떤 발달 단계에 있는 어떤 아동들에게도 효과적으로 가르칠 수 있다.
      ii. 어떤 연령층, 어떤 사회적 출신 아동들에게도 그가 가지고 있는 사고양식과 그가 이해할 수 있는 표현수단에(EIS 이론) 대응되는 적절한 형태로 전달될 수 있다. 따라서, 학습의 조기 교육의 가능하다. 또한, 전달 수단으로서 언어의 역할이 강조된다.

3. EIS 이론

(a) ([3] p. 143) Bruner는 아동들이 그들이 학습하고 있는 개념이나 아이디어를 정신적으로 어떻게 표상(representation)하는지에 관심을 두었다. Piajet의 균형화에 따른 인지 발달 개념에 부분적으로 의존하면서, 환경에 대한 상호작용의 결과가 아동들의 사고속에서 어떻게 표상되는가에 초점을 맞추었다.

(b) (p. 163) 지능 발달에 대한 견해 -

(c) (p. 163) 활동적 표현 (enactive representation) -

(d) (p. 163) 영상적 표현 (iconic representation) -

(e) (p. 164) 상징적 표현 (symbolic representation) -

(f) (p. 164) Bruner의 가정 -

(g) 학문의 기본 원리나 구조를 아동의 능력에 맞추어 구체적인 활동적 양식으로 제시할 수도 있고, 시각적 표현이나 추상적 기호 표현으로 제시할 수도 있다. 이 때, 학문의 기본 원리나 구조 자체는 그대로이지만 그 표현 양식만 바뀌게 되는 것이다. 따라서, 학습의 준비성의 개념은 소멸되고, 아동의 능력에 맞추어 교재를 번역·제시하는 것이 중요한 문제로 대두된다. 즉, 학습의 조기 교육 가능성을 나타낸다.

(h) 나선형 교육과정(spiral curriculum)의 원리

   i. ([2] p. 32) 세 가지 표현 수단의 발전에 따라 학습을 지도해야 한다.

   ii. Bruner는 최종적인 것의 지도를 생각하고 있지는 않다. 아동은 점차 학습해 나감에 따라서 자신이 최초에 배운 것을 점차 강력하고 정확하게 구성해 나아갈 수 있으며, 이는 초기의 학습이 충실하면 할수록 보다 쉽게 이루어진다.

   iii. 교육은 마지막의 결론적인 취급이 가능하다고 여겨질 때까지 연기되어서는 안 되며, 그 이전 단계에서 보다 직관적이고 간단한 형태로 도입되어야 한다. 학습이 점점 진전되어 감에 따라 다시 되돌아 와 배운 것을 보다 심화·확대하여 점차적으로 강력한 개념으로 재구성해 나아갈 수 있도록 해야 한다.

   iv. 최종적인 수학적 개념의 폭넓은 범위의 관계를 처음부터 바로 제시하고 증명하는 것이 아니라, 학습 주제를 계속적으로 제시함으로써 직관을 줄이고 형식화를 증가시킨다.

4. 발견학습

(a) 학생들 스스로 어떤 일반화와 원리를 발견하게 하여 학습의 즐거움을 느끼게 하고 오랜 세월에 걸쳐서 즐겨했던 수학의 창조적 과정에 참여하게끔 하도록 한다.

(b) ([2] p. 30) 발견학습 - 직관적 사고와 분석적 사고

(c) ([2] p. 30) 두 가지 측면

   i. Socrates식 대화법 - 학습자가 알고 있는 것을 재조직하고 회상해 낸다. 즉, 아동으로 하여금 발견을 할 수 있도록 유도한다.

   ii. 구체적인 자료의 취급을 통해 아동이 이해하고 있는 직관적인 규칙성과 대응하는 규칙성을 찾는다.

   iii. 학습자가 발경한 것은 학습자 밖의 어떤 것이 아니라 앞서 알고 있는 아이디어의 내적인 재구성을 포함한다.

(d) (p. 164, [2] p. 40 - 41, [5] p. 212-214) 발견학습의 예 - 8세 아동을 대상으로 하여 대수 블록을 이용한 Dienes와의 공동 연구 사례

   i. 구체물에 친숙하게 한다 - 대수 블록을 가지고 놀 수 있는 충분한 기회 제공

   ii. 여러 가지 정사각형의 구성을 표현하도록 한다.

iii. 몇 가지 정사각형의 구성으로부터 완전제곱을 유도 - Socrates식 대화로 계수의 규칙성에 대한 패턴 발견을 유도하여 하나의 기호체를 구성하도록 한다.

iv. $(x+2)^2$의 다른 표현인 $x(x+4)+4$을 유도 - 구성된 기호 체계에 대한 새로운 조작

v. 이로부터 다항식의 곱셈전개 및 인수분해를 발견하도록 한다.

vi. 활동적, 영상적, 상징적으로 나아가고 있음

(e) ([3] p. 140 - 141) 발견학습의 예(Montessori 교구) - 받아올림이 있는 세 자리 수의 덧셈 (246+127=373)

i. 기계적인 훈련에 의한 방법

ii. 활동적 표현 - 빨대 묶음

iii. 영상적 표현 - 색깔이 표시된 정사각형 모양의 카드

iv. 상징적 표현 - 덧셈의 형식화 (받아올림)

v. 이로부터 다항식의 곱셈전개 및 인수분해를 발견하도록 한다.

vi. 활동적, 영상적, 상징적으로 나아가고 있음

5. Piajet의 이론과의 비교

(a) (p. 163) Bruner는 Piajet의 이론을 본질적으로 받아들이고 있으면서도, 학습의 개인에 의한 자주적인 형성보다 교육적 전달을 강조하고 있다. 즉, Bruner는 지적 발달에 있어서 Piajet가 중시하고 있는 내적인 자기조정 요인을 인정하면서도 외적인 사회·문화적 요인인과 교육적·언어적 요인을 강조하는 점에서 Piajet와 입장을 달리하고 있다.

(b) Bruner는 사고의 발달에 있어서 문화 환경의 영향 및 교육의 역할을 매우 높게 평가 하고 있으며, 특히 사회적·역사적 요경험의 전달 수단으로서의 언어의 역할을 중시하고 있다.

(c) ([2] p. 30) 학습의 준비성에 관한 견해 -

- **제3절 스켐프의 수학 학습 심리학**

1.

2.

3.

- **제4절 딘즈의 수학 학습 심리학**

1.

2.

3.

6장 연습문제

1. Piajet의 발생적 인식론에 대하여 간단히 설명하여라.
2. schéme의 개념을 간략히 설명하여라.
3. 적응기능(동화와 조절)과 조직기능에 대하여 설명하라.
4. 동화와 조절의 예를 들어라.
5. Piajet의 인지발달 단계에 대하여 설명하라.
6. 경험적 추상화와 반영적 추상화의 의미와 예를 들어라.
7. 논리-수학적 경험에 대하여 설명하라.

   대상 자체와는 무관하게 주체의 활동과 결과에 대한 경험이 논리-수학적인 경험이다. 예를 들어 어린 아동이 사과를 어떤 모양으로 늘어놓고 어떤 순서로 세어 보아도 개수가 같다는 것을 발견했을 때 아동은 논리-수학적인 경험을 한 것이다. 모든 논리-수학적인 개념은 주체 자신에 의해 구성된 것으로 내면화되어 조작으로 변환될 수 있는 행동만을 포함한다.

8. 반사와 반성에 대하여 설명하라.
9. 내면화와 주제화에 대하여 설명하라.
10. Piajet의 균형화 이론에 대하여 간단히 설명하라. ('05. #5)

    기존의 인지 구조와 반사되어 들어온 새로운 내용 사이에 인지적 불균형이 야기되는데, 동화와 조절 과정을 통해 이 불균형 상태를 벗어나 인지적 균형 상태에 이르게 되는 것을 말한다.

11. Piajet의 인지 심리학에 따른 학습을 구현하게 위한 교사의 역할에 대하여 설명하라.

    교사는 학습자의 인지 발달 수준보다 조금 더 높은 수준의 활동을 제공해야 하며, 이를 위해서는 다양한 학습자들의 수준을 정확히 진단하기 위한 교사의 노력이 요구된다. 비슷한 수준의 학습자들로 소집단을 구성하는 학습도 고려해 볼 수 있다.

12. Piajet의 인지 심리학에 따른 수학과 학습 지도 원리 5가지를 설명하여라.
13. Bruner가 말하는 지식의 구조란 무엇인지 설명하라여.
14. Bruner의 이론에서 지식의 구조를 지도하면 얻게 되는 네 가지 이점은 무엇인지 설명하여라.
15. 나선형 교육과정의 의미는 무엇인지 설명하여라.
16. 지식의 구조를 지도할 수 있게 하는 Bruner의 가정은 무엇인지 설명하여라.
17. Bruner의 EIS이론에 대하여 간단히 설명하라. ('06. #3)

    아동의 지능 발달은 활동적 표현, 영상적 표현, 상징적 표현의 순서로 이루어지는 표현 수단의 발달과 그 사이의 조정 능력의 발달을 의미한다.

    (1) 활동적(enactive) 표현 - 적절한 운동적 반응을 통하여 표현하는 것으로 구체적 조작기까지의 아동에게 지배적인 역할을 한다.
    (2) 영상적(iconic) 표현 - 대상에 대한 그림이나 이미지 등으로 표현하는 것을 말한다.
    (3) 상징적(symbolic) 표현 - 언어 능력의 발달과 더불어 나타나며 상징적으로 표현하는 것을 말한다.

18. Bruner의 EIS이론에서 각 표현에 해당하는 예를 들어라.

19. Bruner가 EIS이론을 통하여 가정하고 있는 것은 무엇인지 설명하라.

수학의 어떠한 지식도 세 가지 표현 양식으로 나타낼 수 있으며, 각각의 양식에 알맞은 수준에 따라 지도할 수 있다.

20. Bruner의 발견학습에서 정사각형 막대기를 이용한 인수분해의 개념 도입에 관하여 설명하여라. ('98. #4)

21. Piajet와 Bruner의 이론의 공통저모가 차이점은 무엇인지 설명하여라.

22. Skemp의 이론에서 schemas란 무엇인지 설명하라.

인간의 행동이나 사고를 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 심적인 구조를 말하는 것으로, Pajet의 schéme과 유사한 개념이다. Skemp는 어떤 것을 이해한다는 것은 그것을 적절한 schemas에 동화사키는 것으로 보았다.

23. Skemp의 이론에서 도구적 이해와 관계적 이해에 대하여 설명하고 그 예를 들어라.

(1) 도구적 이해 - 이유는 모르는 채 암기한 규칙을 문제 해결에 적용하는 것
(2) 관계적 이해 - 무엇을 해야 할 지, 왜 그런지를 모두 알고 있으면서 일반적인 수학적 관계로부터 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 상태

24. Skemp의 이론에서 관계적 이해로 수학을 학습할 때의 장점 네 가지를 간단히 설명하라. ('01. #3-2)

(1) 수학을 관계적으로 이해하면, 새로운 과제에 더 잘 적응할 수 있다.
(2) 수학을 관계적으로 이해하면, 기억하는 것이 더 쉽다.
(3) 수학을 관계적으로 이해하는 것 그 자체가 효과적인 목적이 될 수 있다.
(4) 관계적 schemas는 질적으로 유기적이다. 즉, 관계적 스키마는 그 자체가 성장하는 하나의 요인으로 작용한다.

25. Skemp의 이론에서 도구적 이해로 수학을 학습할 때의 장점 세 가지를 간단히 설명하라. ('01. #3-1)

(1) 보통 이해하기가 쉽다.
(2) 보상은 더욱 즉각적이고 명백하다.
(3) 지식이 덜 포함되어 있다.

26. 교사가 수학을 도구적으로 가르칠 수 밖에 없는 경우를 세 가지로 설명하라.
(1) 관계적 이해를 하는데 시간이 너무 많이 소요되어 이해를 위한 특정한 기법을 사용해야 하는 경우.
(2) 어떤 특정한 내용을 관계적으로 이해하는 것이 너무 어려운 경우.
(3) 관계적으로 이해할 수 있기 전에 그 내용을 다른 과목에서 사용해야 하는 경우.

27. Skemp는 어떤 가정하에 지능모델을 제시하고 있는지 설명하라.

우리 행동의 많은 부분은 목표 상태를 체계적으로 수행하는 방향으로 지향한다.

28. 지휘체계에 대하여 간단히 설명하라.

다양한 환경 속에서 행동을 적절하게 바꿈으로써 목표를 성취할 수 있는데, 이러한 생존 지향적인 능력을 지휘체계라고 한다. 지휘체계는 다음과 같은 구성 요소로 이루어진다.

(1) 감지기 -
(2) 비교자 -
(3) 행동계획 -

29. 델타-1, 델타-2에 대하여 간단히 설명하라.

(1) 델타-1 - 외부의 물리적 환경으로부터 정보를 수집하고, 또 실제적인 대상에 행동하게 하는 지휘계이다.

(2) 델타-2 - 델타-1이 수행하는 일에서 적응력을 갖도록 schemas를 구성하는 지휘체계이다.

30. Skemp의 이론에서 직관적 지능과 반성적 지능에 대하여 설명하라. ('99. 추가 #2)

(1) 직관적 지능 -

(2) 반성적 지능 -

31. Dienes가 놀이를 통한 수학적 개념의 형성으로 제시한 3단계에 대하여 설명하라.

(1) 1단계 - 목표가 불분명하며 그 자체로 즐기는 예비 놀이 단계이다.

(2) 2단계 - 좀 더 방향이 정해지고 목적을 지향하지만 추구하고 있는 것에 대한 명확한 인식은 없는 구조화된 놀이 단계이다.

(3) 3단계 - 개념이 형성되고, 형성된 개념을 적용하기 위한 실습 놀이 단계이다. 개념의 형성이 오면 이는 보다 높은 수준의 새로운 개념 형성을 위한 놀이의 대상이 된다.

32. Dienes의 개폐연속체의 의미와 설명하고 그 예를 들어라.

(1) 개폐연속체(open-closed continuum) - 개념 형성의 단계를 거쳐 일단 형성된 수학적 개념은 닫힌 상태로 되지만, 분석과 적용 과정에서 열린 상태로 변하여 보다 높은 수준의 재구성이 이루어지는 것을 말한다.

(2) 예 -

33. Dienes의 수학 개념의 학습과정 6단계에 대하여 간단히 설명하라.

(1) 자유 놀이 단계 -

(2) 게임 단계 -

(3) 공통성 탐구 단계 -

(4) 표현 단계 -

(5) 기호화 단계 -

(6) 형식화 단계 -

34. Dienes가 제시한 효과적인 학습원리 4가지에 대하여 설명하라. ('97. #3, '06. #5)

(1) 역동적 원리(Dynamic Principle) - 수학적 개념의 형성을 위하여 예비 놀이 단계, 구조화된 놀이 단계, 실습 놀이 단계의 각각을 순차적으로 적절한 시기에 필수적인 경험으로 제공해야 한다.

(2) 지각적 다양성의 원리(Perceptual Variability Principle) - 다르게 보이지만 근본적으로 동일한 개념 구조를 가지는 과제를 제공하는 것으로 지각적 표현을 변화시키는 것이 여기에 해당한다.

(3) 수학적 다양성의 원리(Mathematical Variability Principle) - 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 한 많은 경우를 다루게 하여, 개념의 성장을 돕기 위한 구조화된 경험을 제공한다.

(4) 구성의 원리(Constructivity Principle) - 수학적 상황에서는 구성이 분석에 우선되어야 한다.

35. Dienes가 제시한 학습원리를 적용하여 직육면체의 개념에 대한 학습을 어떻게 지도할 수 있는지 설명하라.

36. Dienes의 개념 학습 원리를 Piajet의 반영적 추상화의 입장에서 설명하라.

37. Ausubel (Ó6. #4)