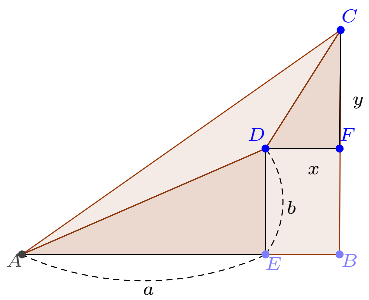
1 코시-슈바르츠 부등식

다음 부등식을 증명해보자. 단, a, b, x, y는 모두 양수.

$$(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

증명. 다음 그림을 생각해본다.



삼각형 △ACD에서 $\overline{AC} \le \overline{AD} + \overline{DC}$임은 명백하다. 피타고라스의 정리에 의하여

$$\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2}.$$

양변을 제곱하여 정리한다.

$$\begin{aligned}(a+x)^2+(b+y)^2 &\le a^2+b^2+x^2+y^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\\ 2ax+2by &\le 2\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}\\ ax+by &\le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

양변을 다시한번 제곱하면

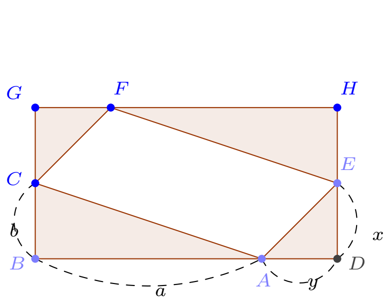
$$(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

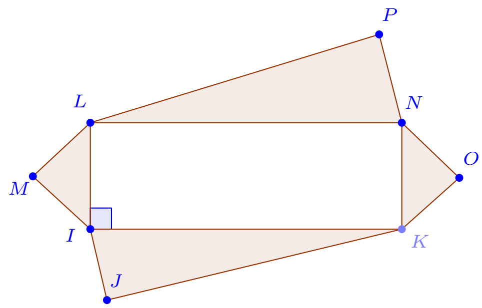
등호는 점 D가 선분 $\overline{AC}$ 위에 있을 때 성립한다. 즉 $\overline{AD}$와 $\overline{DC}$의 기울기가 같을 때이다.

$$(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2) \quad (\text{등호는 } \frac{b}{a} = \frac{y}{x} \text{ 일 때})$$

□

증명. 이번에는 다음 그림을 생각해보자.





그림에서 $\overline{AB} = \overline{FH} = \overline{JK} = \overline{PL} = a$, $\overline{BC} = \overline{EH} = \overline{MI} = \overline{PN} = b$, $\overline{DE} = \overline{CG} = \overline{ON} = \overline{MI} = x$, $\overline{AD} = \overline{GF} = \overline{OK} = \overline{LM} = y$라 하자.

그림에서 평행사변형 면적이 최대가 될 때는 한 각이 직각인 직사각형인 경우이므로 왼쪽그림 $\leq$오른쪽그림임은 자명하다. 식으로 써보면,

$$(a+y)(b+x) \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2} + 2\left(\frac{ab}{2} + \frac{xy}{2}\right).$$

전개하여 정리한다.

$$\begin{gathered} ab + ax + by + xy \leq ab + xy + \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \\ ax + by \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \\ (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2). \end{gathered}$$

이제 등호가 성립하는 경우를 따져보자. 등호가 성립하려면 왼쪽 그림의 안쪽 평행사변형이 처음부터 직사각형인 경우이다. 그러면 $\triangle ABC \sim \triangle EDA$가 되어 $\angle CAB = \angle AED$이어야 한다. 그러므로 닮음비를 이용하여 $a : x = b : y$이므로 $ay = bx$, 즉 $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$일 때 등호가 성립한다.

$\square$