8 다변수 미적분학의 기본 정리

이 장에서는 곡선 또는 곡면위에서 정의된 함수의 적분에 관하여 고찰하고 이러한 적분이 실제 응용에 어떻게 사용되는지 알아보기로 한다.

8.1 곡선

곡선이란 기하적으로 구불구불한 (유한 또는 무한)선분을 뜻한다. 우리는 곡선을 원, 타원, 포물선, 직선등과 같은 것을 생각할 수 있다. 이러한 곡선을 보다 수학적으로 엄밀하게 도입하도록 하자.

정의 8.1 *곡선 C 이란 구간 $I \subset \mathbb{R}$ 에서 정의된 연속함수 $\phi : I \to \mathbb{R}^m$ 를 말하며 함수 ϕ 의 치역(ϕ 에 의한 I 의 상)*

$$\phi(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} = \phi(t),\ t \in I\}$$

을 C 의 **자취**, *t 를* **곡선의 매개변수**, *구간 I 를* **매개변수 구간***이라 한다. 이 경우 곡선 C 를 간단히 순서쌍 $C = (\phi, I)$ 으로 나타낸다. 점 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 가 C 의 자취에 속하면* **곡선 C 위에 있다***라고 한다.*

보기 1 *$\mathbf{x}_0, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ 라 하자. $\phi(t) := t\mathbf{a} + \mathbf{x}_0$ 에 대한 $\mathbb{R}$ 의 상은 직선임을 쉽게 알 수 있다(연습문제 2). 이것을* **$\mathbf{x}_0$를 지나고 $\mathbf{a}$방향으로의 직선***이라 부른다. 직선은 $\mathbb{R}^m$ 에서 가장 단순한 곡선이다.*

보기 2 *$\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ 에 의한 구간 $[0, 2\pi]$ 의 상은 원임을 알 수 있다. 따라서 원은 곡선이다.*

점들의 주어진 집합은 많은 다른 곡선들의 자취가 될 수 있다. 예를 들어, 선분 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, 0 < x \le 1\}$는 $(0,1]$ 위에서 $\phi(t) = (t,t)$, $(0,2]$ 위에서 $\psi(t) = (t/2, t/2)$, $[1,\infty)$ 위에서는 $\sigma(t) = (1/t, 1/t)$의 자취이다. 비록 이 함수들은 같은 선분을 그리지만 각각은 다르게 그린다. 함수 ψ는 ϕ보다 두 배로 천천히 선을 그리고, σ는 ϕ에 꺼꾸로 선을 그린다. 그러므로 곡선 (ϕ, I)는 단순히 점들의 집합 $\phi(I)$일 뿐만 아니라 그 점들을 그리는 특별한 방법 $\phi : I \to \phi(I)$를 함께 고려한 것이다.

정의 8.2 *$I = [a,b]$가 닫혀있고 유계이면 곡선 $C = (\phi, I)$를* **호***라 하고 이 경우 $\phi(a)$, $\phi(b)$를 C의* **끝점***이라 한다. $\phi(a) = \phi(b)$이면 호 $(\phi, [a,b])$는* **닫혀있다***고 한다. ϕ가 I 위에서 1-1이면, 닫혀있지 않은 곡선 (ϕ, I)를* **단순곡선***이라 부르고, ϕ가 $[a,b)$ 위에서 1-1이고 $\phi(a) = \phi(b)$이면, 닫힌곡선 $(\phi, [a,b])$를* **단순 닫힌곡선** *또는* **조르단 곡선***이라 한다.*

조르단 정리에 의하면 $\mathbb{R}^2$에서 모든 단순 닫힌곡선 (ϕ, I)의 자취는 $\mathbb{R}^2$를 두 조각, 즉 유계 연결집합 E와 유계가 아닌 연결집합 Ω (단, $\partial E = \partial\Omega = \phi(I)$) 로 나눈다.

$\mathbb{R}^m$에서 일반적인 곡선을 단순하게 어떤 연속함수 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$에 대한 어느 구간의 상이라고 정의하기에는 너무 광범위한 정의가 된다. 실제로 단위구간 $[0,1]$에서 단위 정사각형 $[0,1] \times [0,1]$으로 가는 전사인 연속함수가 존재한다. 이러한 곡선을 페아노[1] 곡선 또는 공간채우는(Space-filling)곡선[2] 이라 한다. 이를 피하는 한 방법으로 위상동형, 즉, 역함수 또한 연속인 함수를 곡선으로 정의하는 것이다. 그러나 미분가능한 함수를 사용하여 곡선을 정의하려 한다.

열린 집합이 아닌 정의역에서 정의된 함수의 편미분의 정의를 확장해 보자. m, n, $p \in \mathbb{N}$ 이고 E 는 $\mathbb{R}^n$의 부분집합이라 하자. 함수 $f : E \to \mathbb{R}^m$가 E 위에서 $\mathcal{C}^p$라 함은 열린집합 $V \supseteq E$ 와 V 위에서 계수 $j \le p$의 편미분이 존재하는 함수 $g : V \to \mathbb{R}$가 존재하여 모든 $\mathbf{x} \in E$에 대하여 $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$을 만족한다. 이 경우 f의 **편도함수**는 g의 편도함수로 정의한다. 즉 $\mathbf{x} \in E$ 이고 $k = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, m$에 대하여 $\partial f_j / \partial x_k(\mathbf{x}) = \partial g_j / \partial x_k(\mathbf{x})$. 모든 $p \in \mathbb{N}$에 대하여 E 위에서 f가 $\mathcal{C}^p$이면 함수 $f : E \to \mathbb{R}^m$ 는 E 위에서 $\mathcal{C}^\infty$ 라 한다.

1) 페아노는 자연수를 정의한 인물과 동일인물이다.
2) 이 곡선의 페아노의 발견은 그 당시 많은 수학자들에게 충격적이었다. 왜냐하면 이 곡선은 연속 곡선이 가져야 하는 그들의 선입견의 모든 것을 위반하였기 때문이다. 그러나 다른 한편으로는 이 곡선은 기회를 제공하였는데 실제로 연속곡선이 $\mathbb{R}^2$ 의 부분집합의 내재성의 위상성질을 찾는 것이 I 에서 X 위로의 연속함수의 존재성과 동치임을 결정하는 매우 흥미로운 문제를 제안하였다.[11]

이제부터 p는 자연수이거나 ∞를 나타낸다.

정의 8.3 *I가 (유계이거나 유계가 아닌) 구간이라 하자. $\mathbb{R}^m$의 $\mathcal{C}^p$ 곡선 $C = (\phi, I)$ 은 $\phi : I \to \mathbb{R}^m$ 는 I 위에서 $\mathcal{C}^p$ 인 함수이다.*

곡선 (ϕ, I)의 $\mathcal{C}^p$ **매개변수화**는 $\psi(J) = \phi(I)$를 만족하는 단순 $\mathcal{C}^p$ 곡선 (ψ, J)를 의미한다. 방정식

$$x_j = \psi_j(t), \qquad t \in J, \quad j = 1, \cdots, m$$

는 매개화 (ψ, J) 에 의해 도입된 (ϕ, I)의 **매개변수방정식**이라 불린다.

어떤 구간에서 실수값을 갖는 $\mathcal{C}^p$ 함수의 그래프는 단순 $\mathcal{C}^p$곡선의 자취임을 다음 보기에서 알 수 있다.

보기 3 *I는 구간이고 $f : I \to \mathbb{R}$는 $\mathcal{C}^p$ 함수라 하자. 자취가 $y = f(x)$, $x \in I$의 그래프와 일치하는 1-1 인 $\mathcal{C}^p$ 함수 $\phi : I \to \mathbb{R}^2$가 존재함을 증명하여라.*

풀이 $\phi(t) = (t, f(t))$라 하면 ϕ는 I에서 $\mathcal{C}^p$이고 1-1이다. 또한 $\phi(I)$는 I에서 $y = f(x)$의 그래프이다.

보기 4 *원 $x^2 + y^2 = a^2$는 $\mathbb{R}^2$에서 $\mathcal{C}^\infty$ 단순닫힌곡선의 자취임을 보여라.*

풀이 $x^2 + y^2 = a^2$를 만족하는 점 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$의 집합은 $\phi(t) = (a\cos t, b\sin t)$ 와 $I = [0, 2\pi]$에 의하여 정의되는 $\mathcal{C}^\infty$ 단순닫힌곡선의 자취이다.(그림 8.1).

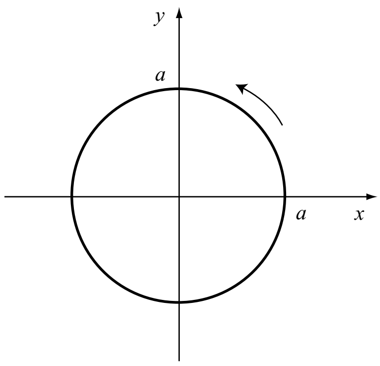

그림 8.1

정의 8.4 *단순 $\mathcal{C}^p$ 곡선 $C = (\phi, I)$ 의* **호의 길이는** *확장된 실수*

$$L(C) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\| : \{t_0, t_1, \cdots, t_k\} \text{ 는 } I \text{ 의 분할} \right\}$$

으로 정의한다. 만일 $L(C)$ 가 유한이면 곡선 C **는 길이를 갖는다고** *한다.*

다음 결과는 끝점을 갖는 모든 $\mathcal{C}^p$곡선은 $p \geq 1$에 대하여 길이가 있음을 보인다. 공간을 채우는 곡선은 ϕ가 단지 연속이라면 이 결과는 거짓임을 보이고 연습문제 4 는 곡선이 끝 점을 가지고 있지 않다면 이는 거짓임을 보이고 있다.

정리 8.1 *$C = (\phi, I)$ 가 $\mathcal{C}^1$ 단순 호이면 C의 호의 길이는*

$$L(C) = \int_I \|\phi'(t)\|\, dt.$$

증명 $\epsilon > 0$라 하자. $\phi = (\phi_1, \phi_2 \cdots, \phi_m)$라 놓고 입방체 $I^m := I \times \cdots \times I$에 있는 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$에 대하여

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \Big(\sum_{\ell=1}^{m} |\phi'_\ell(x_\ell)|^2 \Big)^{1/2}$$

라 놓자. 가정에 의하여 F는 I^m 위에서 연속이고, I^m은 컴팩트이다. 그러므로 F는 I^m 위에서 고른연속이다. 즉 $\delta > 0$가 존재하여

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I^m,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| < \frac{\epsilon}{2|I|}.$$

$\mathcal{P} = \{u_0, \cdots, u_N\}$는 I의 임의의 분할이라 하자. 정리 3.5 에 의하여 $\mathcal{P}$ 보다도 더 세분된 분할 $\mathcal{P}_0 = \{t_0, \cdots, t_k\}$ 를 택하여 $\|\mathcal{P}_0\| < \delta/\sqrt{m}$ 이고

$$\int_I \|\phi'(t)\|\, dt - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{j=1}^{k} \|\phi'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) < \int_I \|\phi'(t)\|\, dt + \frac{\epsilon}{2}.$$

$\ell \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 과 $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$를 고정하자. 정리 2.20(일차원의 평균값 정리)에 의하여 점 $c_j(\ell) \in [t_{j-1}, t_j]$를 택해서

$$\phi_\ell(t_j) - \phi_\ell(t_{j-1}) = \phi'_\ell(c_j(\ell))(t_j - t_{j-1}).$$

$\|\mathcal{P}_0\| < \delta/\sqrt{m}$이므로 $\|F(t_1, \cdots, t_j) - F(c_j(1), \cdots, c_j(m))\| < \epsilon/(2|I|)$. $\phi'(t) = (\phi'_1(t), \cdots, \phi'_m(t))$이므로 $F(t_1, \cdots, t_j) = \|\phi'(t_j)\|$ 이고

$$\begin{aligned} F(c_j(1), \cdots, c_j(m))(t_j - t_{j-1}) &= \Big(\sum_{\ell=1}^{m} |\phi'_\ell(c_j(\ell))|^2 \Big)^{1/2} (t_j - t_{j-1}) \\ &= \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\|. \end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{j=1}^{k}\|\phi'(t_j)\|(t_j-t_{j-1})-\frac{\epsilon}{2}<\sum_{j=1}^{k}\|\phi(t_j)-\phi(t_{j-1})\|<\sum_{j=1}^{k}\|\phi'(t_j)\|(t_j-t_{j-1})+\frac{\epsilon}{2}.$$

앞의 식과 위 부등식을 결합하면

$$\int_I\|\phi'(t)\|\,dt-\epsilon<\sum_{j=1}^{k}\|\phi(y_j)-\phi(t_{j-1})\|<\int_I\|\phi'(t)\|\,dt+\epsilon$$

왼쪽 부등식과 정의 8.4 를 사용하면

$$L(C)\geq\sum_{j=1}^{k}\|\phi(t_j)-\phi(t_{j-1})\|>\int_I\|\phi'(t)\|\,dt-\epsilon,$$

즉, $L(C)\geq\int_I\|\phi'(t)\|\,dt$. 한편, $\mathcal{P}_0=\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$는 $\mathcal{P}$ 보다 세분이므로 오른쪽 부등식으로 부터

$$\sum_{i=1}^{N}\|\phi(u_i)-\phi(u_{i-1})\|\leq\sum_{j=1}^{k}\|\phi(t_j)-\phi(t_{j-1})\|<\int_I\|\phi'(t)\|\,dt+\epsilon.$$

I의 모든 분할 $\{u_0,u_1,\cdots,u_N\}$ 위에서 상한을 취하면

$$L(C)\leq\int_I\|\phi'(t)\|\,dt+\epsilon,$$

즉, $L(C)\leq\int_I\|\phi'(t)\|\,dt$. ■

공간에서 움직이는 입자 p의 경로로서 곡선의 자취 ϕ 와 특별한 비행기록으로써 매개화 (ϕ,I) 의 각각을 설명하는 것이 유용하다.

참고 1 *$t_0\in I^o$ 이고 $\mathbf{x}_0=\phi(t_0)$ 이면 $\|\phi'(t_0)\|$는 $\mathbf{x}_0$에서 입자 p의 속력이고 $\phi'(t_0)$ 은 영벡터가 아닐 때 점 $\mathbf{x}_0$에서 진행방향으로 향하는 곡선 C 의 접벡터이다.*

증명 $t_0\in I$ 라 하자. 각각의 충분히 작은 $h>0$ 에 대하여 몫

$$\frac{\phi(t_0+h)-\phi(t_0)}{h}$$

은 곡선 C 을 따라 진행 방향으로 향하는 벡터이고 $\mathbf{x}_0$ 에서 C 에 대한 접선의 방향을 근사시킨다 (그림 8.2). p의 속력을 계산하기 위하여 곡선 C의 호의 길이 s를 다음과 같이 정의하자.

$$s:=\ell(t):=\int_a^t\|\phi'(u)\|\,du,\qquad t\in[a,b].\tag{8.1}$$

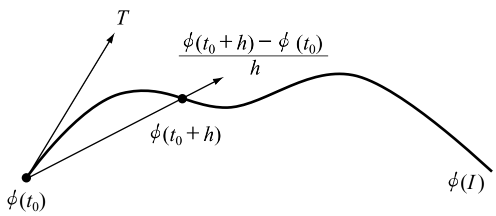

그림 8.2

미적분학의 기본정리에 의하여 $ds/dt = \ell'(t) = \|\phi'(t)\|$. 그러므로 호의 길이 s의 시간 t에 대한 변화율은 $\|\phi'(t)\|$ 이다. 즉 $\mathbf{x}_0$ 에서 입자 p 의 속력은 정확히 $\|\phi'(t_0)\|$ 이다. ■

열린 구간위에서 미분가능한 함수의 그래프는 매끄럽다. 즉, 각 점에서 접선은 유일하게 결정된다. 다음 보기는 $\mathcal{C}^p$ 곡선의 자취에 대하여 그렇지 않음을 보여 준다.

보기 5 $\phi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$*이고* $I = [0, 2\pi]$*라 하자.* (ϕ, I)는 $\mathbb{R}^2$ *에서 모서리를 갖는* $\mathcal{C}^\infty$ *단순닫힌곡선임을 증명하여라.* (이러한 곡선을 **사각별**(astroid)라 한다.)

풀이 분명히 ϕ는 I 위에서 $\mathcal{C}^\infty$이고 $[0, 2\pi)$ 위에서 1-1이다. $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$라 하고 배각의 공식에 의하여

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}\cos^3(2t) + \frac{1}{4}.$$

그러므로 $\sqrt{x^2+y^2}$ 는 ($t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$ 일 때) 최대값 1 부터 ($t = \pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4$ 일 때)최소값 $1/2$ 까지 변한다. I는 연결이고, ϕ는 미분가능, 따라서 연속이므로 $\phi(I)$ 또한 연결이다. 몇 개의 점들을 작도해 보면 $\phi(I)$는 $(0, 1)$ 을 시계반대방향으로 출발하여 되돌아오는 사각별 형태이다(그림 8.3).

자취 $\phi(I)$ 가 점 (x_0, y_0)근방에서 미분가능한 함수의 그래프일 때 $\mathbb{R}^2$에 있는 곡선 (ϕ, I)은 점 $(x_0, y_0) = \phi(t_0)$ 에서 **유일한 접선을 갖는다**고 말한다. 이 말은 $t_0 \in I^o$ 일 때 열린 구간 I_0, J 와 미분가능한 함수 $f : J \to \mathbb{R}$가 존재하여 $t_0 \in I_0 \subset I$ 와 $x_0 \in J$ 이고 J 위에서 $y = f(x)$의 그래프가 $\phi(I_0)$와 일치, 또는 $y_0 \in J$이고 J 위에서 $x = f(y)$의 그래프가 $\phi(I_0)$와 일치, 둘 중 하나를 만족한다. 각 점에서 유일한 접선을 갖는 곡선을 어떻게 확인하는가? (ϕ, I) 를 사각별이라 하자(보기 5). $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$ 일 때 $\phi'(t) = (0, 0)$ 임을 주목하자. 즉, 그 점들은 곡선 (ϕ, I)가 유일한 접선을 갖지 못하는 곳이다. 그러므로 곡선 (ϕ, I)는 $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$일 때 어떤 점 $(x_0, y_0) = \phi(t_0)$에서 유일한 접

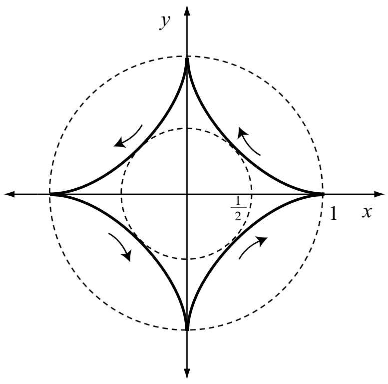

그림 8.3

선을 갖는다고 추측한다. 다음은 끝 점들을 제외하고 이러한 추측이 타당함을 보여 준다.

참고 2 *만일* (ϕ, I)*이* $t_0 \in I^o$*일 때* $(x_0, y_0) = \phi(t_0)$*에서 접선을 갖지 않는* $\mathbb{R}^2$ *내의* $\mathcal{C}^1$ *곡선이라 하면,* $\phi'(t_0) = \mathbf{0}$*이다.*

증명 (ϕ_1, ϕ_2)를 ϕ의 성분이라 하자. $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$라 가정하자. $\phi_1'(t_0) \neq 0$라 가정할 수 있다. 음함수의 정리에 의하여 $F(x,t) = \phi_1(t) - x$를 적용하고, x_0를 포함하는 열린 구간 J 와 연속적으로 미분가능한 함수 $g : J \to I$ 가 존재하여 모든 $x \in J$에 대하여 $\phi_1(g(x)) = x$ 이고 $g(x_0) = t_0$이다. $f = \phi_2 \circ g$라 하면, $y = f(x), x \in J$의 그래프는 (x_0, y_0) 근방에서 $g(J)$ 위에서 ϕ의 자취이다. f는 x_0에서 미분가능이므로 그래프 $y = f(x)$는 x_0에서 접선을 갖는다. 이는 모순이다. ■

따라서 다음을 정의할 수 있다.

정의 8.5 (ϕ, I)*는* $\mathcal{C}^1$ *곡선 또는 매개변수화라 하자.*

(i) $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$ *이면* (ϕ, I)*는* $t_0 \in I$ *에서* **매끄럽다** *한다.*

(ii) I *의 각 점에서 매끄러우면 닫혀있지 않은 곡선* (ϕ, I) *는* **매끄럽다***하고,* $(\phi, [a, b))$ *가 매끄럽고* $\phi'(a) = \phi'(b)$*이면, 닫힌곡선* $(\phi, [a, b])$ *는* **매끄럽다***고 한다.*

(iii) $C = (\phi, I)$ *가 단순이고 매끄러우면* $\mathbf{x}_0 = \phi(t_0)$ *에서* C *의* **단위 접선벡터** *는* $T(\mathbf{x}_0) := \phi'(t_0)/\|\phi'(t_0)\|$.

참고 2 에 의하면 어떤 내부의 점에서 접선을 갖지 않는 곡선은 매끄럽게 매개변수화되지 않는다. 이것의 역은 성립하지 않는다.

참고 3 *각 점에서 유일한 접선을 갖는 곡선은 매끄럽지 않은 매개변수를 가질 수도 있다.*

증명 $\psi(t) = (t^3, 3t^3)$ 라 하자. $\psi(t)$ 의 자취는 각각의 점에서 유일한 접선이 $y = 3x$ 이다. 그런데도 $\psi'(0) = \mathbf{0}$.(물론, 자명한 $\phi(t) = (t, 3t)$ 와 같이 $\phi'(0) \neq \mathbf{0}$ 을 만족하는 또 다른 매개화 곡선이 존재한다.) ■

이렇게 볼 때 주어진 곡선의 모든 매개변수화에 대하여 공통의 성질과 그렇지 않은 것 사이의 주의깊은 구별이 필요하다. 예를 들어, 정리 8.1 에서 계산한 주어진 곡선에서 호의 길이는 매개변수화에 대하여 독립적일까?

이 질문에 대답하기 위해서는 몇가지 예비적인 절차가 필요하다.

명제 8.1 *I, J는 닫힌 유계구간이고 $\phi : I \to \mathbb{R}^m$ 는 1-1 이고 연속이라 하자. 어떤 연속함수 $\psi : J \to \mathbb{R}^m$ 에 대하여 $\phi(I) = \psi(J)$ 일 필요충분조건은 J 에서 I 위로 가는 연속함수 τ 가 존재하여 $\psi = \phi \circ \tau$ 이다.*

증명 I 는 컴팩트이고 ϕ 는 1-1 이고 I 위에서 연속이므로 ϕ^{-1} 는 $\phi(I)$ 에서 I 위로 가는 연속함수이다(5.5절 연습문제9). $\psi(J) = \phi(I)$ 이므로 $\tau = \phi^{-1} \circ \psi$ 는 J 에서 I 위로 가는 연속함수이다.

역으로 τ 가 J 에서 I 위로 가는 연속함수 이면 $\psi = \phi \circ \tau$ 는 J 에서 $\phi(I)$ 위로가는 연속함수 이다. 즉 $\psi(J) = \phi(I)$. ■

(ψ, J), (ϕ, I) 가 같은 $\mathcal{C}^1$ 곡선의 매개변수화이고 $\tau = \phi^{-1} \circ \psi$ 는 미분가능하다면 연쇄법칙에 의하여

$$\psi'(u) = \phi'(\tau(u))\tau'(u), \qquad u \in J. \tag{8.2}$$

특히, (ϕ, I) 이 매끄러우면 (ψ, J)이 매끄러울 필요충분조건은 모든 $u \in J$ 에 대하여 $\tau'(u) \neq 0$ 이다. 이것으로부터 다음 정의를 생각한다.

정의 8.6 *$p \geq 1$ 라 하자. 두 개의 매끄러운 $\mathcal{C}^p$ 곡선 (ϕ, I), (ψ, J)가 $\phi(I) = \psi(J)$ 이고 J 에서 I 위로의 $\mathcal{C}^p$ 함수 $\tau : J \to \mathbb{R}$ 가 존재하여 $\psi = \phi \circ \tau$ 이고 모든 $u \in J$ 에 대하여 $\tau'(u) \neq 0$ 일 때 두 곡선을* **매끄러운 동치(smoothly equivalent)** *라 한다. 이 함수 τ 를 $\psi(J)$ 에서 $\phi(I)$ 위로 가는* **추이**(transition)*라 한다.*

τ' 는 연속이고 0 이 아니므로 τ' 는 J 위에서 양수이거나 τ' 는 J 위에서 음수이거나 둘 중의 하나이다. 정리 2.22 에 의하여 추이 τ 는 항상 1-1 이다. 또 만일 두 함수가 **매끄러운 동치**이면 하나가 단순일 필요충분조건은 그 다른 하나도 단순이다(8.4절 연습문제 5).

명제 8.2 *만일 (ϕ, I) 와 (ψ, J) 가 매끄러운 동치이면*

$$\int_I \|\phi'(t)\|\,dt = \int_J \|\psi'(u)\|\,du.$$

증명 만일 τ 가 $\psi(J)$ 에서 $\phi(I)$ 위로 가는 추이이면 $\tau(J) = I$ 이다. 그러므로 (8.2)와 변수변환공식(정리7.16)으로부터

$$\int_I \|\phi'(t)\|\,dt = \int_{\tau(J)} \|\phi'(t)\|\,dt = \int_J \|\phi'(\tau(u))\||\tau'(u)|\,du = \int_J \|\psi'(u)\|\,du.$$

■

유한개의 점을 제외한 $u \in J$에 대하여 $\tau'(u) \neq 0$ 이어도 명제 8.2 는 성립한다(연습문제 8).

다음 적분은 밀도 g 를 갖는 곡선모양의 철사의 질량으로 설명할 수 있다.

정의 8.7 *$C = (\phi, I)$ 는 $\mathbb{R}^m$ 에서 매끄러운 단순호이고 $g : \phi(I) \to \mathbb{R}$ 는 연속이라 하자. C 위에서 g 의* **선적분**은

$$\int_C g\,ds := \int_{\phi(I)} g\,ds := \int_I g(\phi(t))\|\phi'(t)\|\,dt. \tag{8.3}$$

$y = f(x),\ x \in [a, b]$ 로 주어진 곡선 C 에 대하여 이 적분은

$$\int_C g\,ds = \int_a^b g(x, f(x))\sqrt{1 + |f'(x)|^2}\,dx.$$

정리 8.1 에 의하여 선적분 (8.3)은 $g = 1$ 일 때 C 의 호의 길이와 같다. 즉 매개변수 s 는 호의 길이를 나타내고(위의 (8.1)), 미적분학의 기본정리에 의하여 $ds/dt = \|\phi'(t)\|$. 그러므로 s의 미분 $ds = \|\phi'(t)\|\,dt$ 에 의하여 정의된다. 곡선위에서 함수 g 의 선적분은 매끄러운 동치 매개변수화에 대하여 변하지 않는다.

정의 8.5 에 의하여 선적분은 결국 3장에서 연습한 일차원 적분의 계산이다.

보기 6 *$g(x, y) = 2xy$, $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ 이고 $I = [0, \pi/2]$ 일 때 $\int_{\phi(I)} g\,ds$ 을 구하여라.*

풀이 $\|\phi'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = 1$ 이므로

$$\int_{\phi(I)} g\, ds = \int_0^{\pi/2} (2\cos t \sin t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = 1.$$

응용을 위하여 위의 개념들을 매끄러운 곡선들의 유한 합집합으로 확장할 필요가 있다. C_j 가 끝 점을 가지는 매끄러운 단순곡선일 때 $C = \cup_{j=1}^N C_j$ 라 하자.

C 가 다음 두 조건

I. 각각의 $j \neq k$ 에 대하여 C_j 와 C_k 의 자취가 서로 만나지 않는다. (이것은 반지모양 $0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2$ 의 경계와 같이 연결되지 않은 매끄러운 곡선에 대하여 허락한다.)

II. 모든 C_j 는 끝점과 끝점이 연결되어 있다. 즉 $C_j = (\phi_j, [a, b])$ 이면 $j = 2, \cdots, N$ 에 대해 $\phi_{j-1}(b_{j-1}) = \phi_j(a_j)$ (그림 8.4) (이것은 유한개의 모서리를 가진 곡선, 예를 들어 삼각형의 변, 직사각형의 경계 등의 경우이다.)

중 하나를 만족하면 **조각적으로 매끄러운 곡선(piecewise smooth curve)**이라 한다. 만일 C 가 조건 II 를 만족하는 조각적으로 매끄러운 곡선이면 점 $\phi(a_1)$ 과 $\phi(b_N)$ 을 곡선 C 의 **끝점**이라 한다.

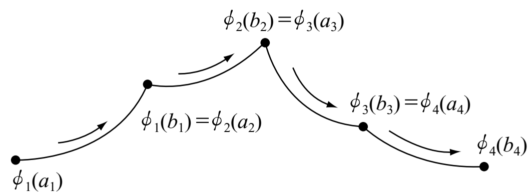

그림 8.4

조각적으로 매끄러운 곡선에 대해 $C = \cup_{j=1}^N C_j$ 라 하자. C 의 자취는 C_j 의 자취의 합집합으로 정의된다. C 의 **매개변수화**란 C_j 의 매끄러운 매개변수화 (ϕ_j, I_j) 의 모임을 의미한다. 매개변수를 바꾸어서 $\cup_{j=1}^N I_j$ 는 어떤 구간이라고 가정할 수 있다(8.2절 연습문제 4). C 의 두 매개변수화 $\cup_{j=1}^N (\phi_j, I_j)$ 와 $\cup_{j=1}^N (\psi_j, I_j)$ 가 **매끄러운 동치**라 함은 각각의 $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 에 대하여 (ϕ_j, I_j) 와 (ψ_j, I_j) 가 매끄러운 동치이다.

각각의 C_j 가 길이를 갖고 있으면 C 는 **길이를 갖는다**고 말하고, 이 경우

$$L(C) = \sum_{j=1}^N L(C_j)$$

로 둔다. 만일 g 가 C 의 자취위에서 연속이고 실수값을 가지면 C 위에서 g 의 **선적분**은

$$\int_C g\,ds = \sum_{j=1}^{N} \int_{C_j} g\,ds$$

으로 정의된다.

조각적으로 매끄러운 곡선 C 를 **단순**이라 함은 C 의 자취가 끝점을 제외하고는 자신과 만나지 않는것을 말하고, **닫혀있다**는 것은 연결되어 있고 자신의 끝점이 동일한 것이다.

보기 7 *정사각형* $[0,1] \times [0,1]$ *의 경계* C *를 매개변수화하고* $g(x,y) = x^3 + y^2$ *일 때* $\int_C g\,ds$ *를 계산하여라.*

풀이 C 는 $t \in [0,1]$ 에 대하여

$$\phi_1(t) = (t,0),\ \phi_2(t) = (1,t),\ \phi_3(t) = (1-t,1),\ \phi_4(t) = (0,1-t)$$

로 매개화할 수 있는 네 개의 매끄러운 조각을 갖는다. $\|\phi_j'(t)\| = 1$ 이므로 정의에 의하여

$$\int_C g\,ds = \int_0^1 t^3\,dt + \int_0^1 (1+t^2)\,dt + \int_0^1 ((1-t)^2+1)\,dt + \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac{13}{4}.$$

보기 8 *정삼각형(그림 8.5)의 경계* C *를 매개화하고* $g(x,y) = x + xy^2$ *일 때* $\int_C g\,ds$ *을 계산하여라.*

풀이 C 는 $t \in [0,1]$ 에 대하여

$$C_1 : \phi_1(t) = (2t,0), C_2 : \phi_2(t) = (2-t, \sqrt{3}(2-t)), C_3 : \phi_3(t) = (t, \sqrt{3}t)$$

로 매개화할 수 있는 세 개의 매끄러운 조각을 갖는다. 따라서 $C = C_1 + C_2 + C_3$ 이고

$$\int_C g\,ds = \int_{C_1} g\,ds + \int_{C_2} g\,ds + \int_{C_3} g\,ds$$

이므로 위 식의 오른쪽을 계산하자. 먼저 $\|\phi_i'(t)\| = 2, i = 1,2,3$ 이므로

$$\int_{C_1} g\,ds = 2\int_0^1 (2t)\,dt = 2,$$

$$\int_{C_2} g\,ds = 2\int_0^1 (2-t)+3(2-t)^3\,dt = \frac{51}{2},$$

$$\int_{C_3} g\,ds = 2\int_0^1 (t+3t^3)\,dt = \frac{5}{2}$$

이므로 구하는 선적분은

$$\int_C g\,dt = 30.$$

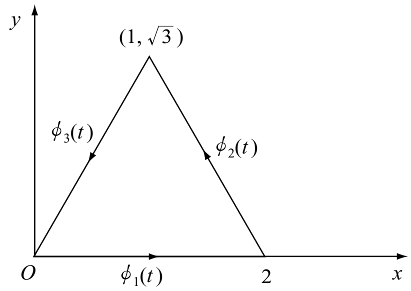

그림 8.5

연습문제 (8.1)

1. $\psi(t)=(a\sin t, a\cos t)$, $\sigma(t)=(a\cos 2t, a\sin 2t)$, $I=[0,2\pi)$, $J=[0,\pi)$ 라 하자. $(\psi(t), I)$ 와 $(\sigma(t), J)$ 의 자취를 그려라.

2. $\mathbf{x}_0, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 이고 $\phi(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{x}_0$ 라 하자. $C = (\phi, \mathbb{R})$ 는 $\mathbf{x}_0$ 와 $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}$ 를 포함하는 매끄러운 단순 유계가 아닌 곡선임을 보여라. 모든 $t_1, t_2 \neq 0$ 에 대하여 $\phi(t_1) - \phi(0)$ 와 $\phi(t_2) - \phi(0)$ 사이의 각은 0 또는 π 임을 증명하여라.

3. I 는 구간이고 $f : I \to \mathbb{R}$ 는 모든 $\theta \in I$ 에 대하여

$$|f(\theta)|^2 + |f'(\theta)|^2 \neq 0$$

이고 연속적으로 미분가능하다. 극좌표로서 $r = f(\theta)$ 의 그래프는 $\mathbb{R}^2$ 에서 매끄러운 곡선의 자취임을 증명하여라.

4. 곡선 $y = \sin(1/x)$, $0 < x \leq 1$ 는 길이를 갖지 않음을 보여라. 따라서 정리 8.1 은 C 가 호가 아닐 때 거짓임을 보여라.

5. 다음 각각의 곡선에 대하여 자취를 그리고, 호의 길이를 계산하여라.

   (a) $\phi(t) = (\sin t, \cos t, e^t), \quad t \in [0, 2\pi]$

   (b) $y^3 = x^2$, $(-1, 1)$ 부터 $(1, 1)$ 까지

   (c) $\phi(t) = (t^3, t^2, t)$, $t \in [0, 2]$

   (d) 보기 5 의 사각별 모양

6. 다음 각각에 대하여 C 의 (조각적으로) 매끄러운 매개변수를 구하고 $\int_C g\,ds$ 를 계산하여라.

   (a) 곡선 C 는 $y = \sqrt{9 - x^2}, x \geq 0$ 이고 $g(x, y) = xy$

   (b) C 는 제일상한에 놓여 있는 타원 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ a, b > 0$ 의 일부이고 $g(x, y) = xy$.

   (c) C 는 곡면 $x^2 + z^2 = 4$ 와 $y = x^2$ 의 교집합이고 $g(x, y, z) = \sqrt{1 + yz^2}$.

   (d) C 는 꼭지점이 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0)$ 인 삼각형 이고 $g(x, y, z) = x + y + z^3$.

7. (ϕ, I) 는 매끄러운 호이고 $g_k : \phi(I) \to \mathbb{R}$는 $k \in \mathbb{N}$ 에 대하여 연속이라 하자.

   (a) $\phi(I)$ 위에서 $g_k \rightrightarrows g$ 이면 $k \to \infty$일 때 $\int_C g_k\,ds \to \int_C g\,ds$ 임을 증명하여라.

   (b) $\{g_k\}$가 점별 단조이고 $k \to \infty$ 일 때 $\phi(I)$ 위에서 $g_k \to g$ 이라고 가정하자. g 가 $\phi(I)$ 위에서 연속이면 $k \to \infty$ 일 때 $\int_C g_k\,ds \to \int_C g\,ds$ 임을 증명하여라.

8. (ϕ, I)는 $\mathbb{R}^m$ 에서 매끄럽고 단순호이고 $\tau : J \to \mathbb{R}$ 는 J 에서 I 위로 가는 1-1, $\mathcal{C}^1$ 함수라 가정하자. 만일 유한개를 제외하고 모든 $u \in J$ 에 대하여 $\tau'(u) \neq 0$ 이고 $\psi = \phi \circ \tau$ 이며 $g : \phi(I) \to \mathbb{R}$ 가 연속이라면 다음을 증명하여라.

$$\int_I g(\phi(t))\|\phi'(t)\|dt = \int_J g(\psi(u))\|\psi'(u)\|du.$$

9. C 는 $I_1 = (-\infty, -1), I_2 = (-1, \infty)$ 일 때 $(\phi, I_1) \cup (\phi, I_2)$ 인 조각적으로 매끄러운 곡선이라 하고,

$$\phi(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

라 하자. 만일 $(x, y) = \phi(t)$ 이면 $x^3 + y^3 = 3xy$ 임을 보여라. C 의 자취를 그려라.

10. 점 $\mathbf{x}_0 = \psi(t_0)$ 에서 매끄러운 곡선 (ψ, I) 의 절대곡률은 다음 극한이 존재할 때

$$\kappa(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\theta(t)}{l(t)}$$

이다. 여기서 $\theta(t)$ 는 $\psi'(t)$ 와 $\psi'(t_0)$ 사이의 각이고, $l(t)$ 은 $\psi(t)$ 로부터 $\psi(t_0)$까지 (ψ, I) 의 호의 길이이다. (그러므로 κ 는 호의 길이에 대해 $\theta(t)$가 얼마나 빠르게 변하는가를 나타내는 양이다.)

(a) 주어진 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여, $\psi(t) := t\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 이고 $I := (-\infty, \infty)$ 일 때 직선 $\Lambda = (\psi, I)$ 의 절대곡률은 Λ 위에 있는 각각의 점 $\mathbf{x}_0$ 에 대하여 0임을 증명하여라.

(b) 주어진 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ 에 대해 $\psi(t) = (r \cos t, r \sin t)$ 으로 주어진 원 C 의 절대곡률은 C 위에 있는 각각의 점 $\mathbf{x}_0$ 에 대하여 $1/r$ 임을 증명하여라.

11. $C = (\phi, [a, b])$ 는 $\mathbb{R}^m$ 위에서 매끄러운 단순호이고 (1)에 의하여 $s = l(t)$ 로 주어졌다고 하자. C 의 **자연 매개변수화(natural parametrization)**는

$$\nu(s) = (\phi \circ l^{-1})(s), \text{ 이고 } L = L(C)$$

인 쌍 $(\nu, [0, L])$ 이다.

(a) 모든 $s \in [0, L]$ 에 대하여 $\|\nu'(s)\| = 1$ 임을 증명하고 C 의 부분곡선 $(\nu, [c, d])$ 의 호의 길이는 $d - c$ 임을 증명하여라.

(b) 각 $s \in [0, L]$ 에 대하여 $\nu'(s)$ 와 $\nu''(s)$ 는 직교함을 보여라.

(c) $\mathbf{x}_0 = \nu(s_0)$ 에서 $(\nu, [0, L])$ 의 절대곡률(위의 연습문제 10)은 $\kappa(\mathbf{x}_0) = \|\nu''(s_0)\|$ 임을 증명하여라.

(d) 만일 $\mathbf{x}_0 = \phi(t_0) = \nu(s_0)$ 이면

$$\kappa(\mathbf{x}_0) = \|\nu'(s_0) \times \nu''(s_0)\| = \frac{\|\phi'(t_0) \times \phi''(t_0)\|}{\|\phi'(t_0)\|^3}$$

임을 증명하여라.

(e) $p \geq 1$ 라 하자. (x_0, y_0) 에서 $\mathcal{C}^p$ 곡선 $y = f(x)$ 의 절대곡률은

$$\kappa = \frac{|y''(x_0)|}{(1 + (y'(x_0))^2)^{3/2}}$$

임을 증명하여라.

8.2 방향이 있는 곡선

매끄러운 곡선 C의 모든 매개변수화 (ϕ, I)는 C를 따라서 '진행 방향'을 결정한다. 즉 방향 $\phi(t)$는 t가 I 위에서 증가할 때 움직이고 $\phi'(t)$점의 방향도 마찬가지이다. 이러한 방향을 (ϕ, I)**에 의하여 유도된** C**의 방향(orientation)**이라 한다 (위 그림 8.1, 8.3, 8.4, 8.5 에서 화살표는 주어진 매개변수화의 방향표현을 나타낸다). (ϕ, I) 와 (ψ, J) 는 추이사상 τ와 함께 같은 곡선의 매끄러운 동등한 매개변수화라 가정하자. τ는 연속적으로 미분가능이고 0 이 아니므로 모든 $u \in J$에 대하여 $\tau'(u) > 0$ 또는 $\tau'(u) < 0$, 둘 중 하나이다. 첫 번째 경우, 벡터 $\phi'(\tau(u))$ 와 $\psi'(u)$ 은 같은 방향(8.1절 (8.2))이므로 이러한 매개변수화는 같은 방향을 결정한다. 두 번째 경우, 벡터들 $\phi'(\tau(u))$와 $\psi'(u)$는 반대방향이므로 다른 방향을 결정한다. 따라서 다음 정의를 얻는다.

정의 8.8 *두 매끄러운 곡선* (ϕ, I) *와* (ψ, J) *가* **방향 동치(orientation equivalent)***라함은 이것들이 매끄러운 동치이고* $\psi(J)$ *에서* $\phi(I)$ *로의 추이함수* τ *가 모든* $u \in J$*에 대하여* $\tau'(u) > 0$ *을 만족하는 것을 말한다.*

보기 1 *z-축의 양의 방향 꼭대기에서 내려볼 때 시계방향으로 주어진,* $\mathbb{R}^3$ *에서 곡면* $x^2 + 5y^2 = 5$ *과* $z = x^2$*이 만나는 곡선* C *의 매끄러운 매개변수를 찾아라.*

풀이 타원기둥면 $x^2 + 5y^2 = 5$ 와 포물기둥면 $z = x^2$ 는 "늘어진 다원면"으로 만난다(그림 8.6의 칠해진 부분이 원기둥 $x^2 + 5y^2 = 5$ 의 내부에 놓인 $z = x^2$의 영역). $x = \sqrt{5}\sin t, y = \cos t$ 는 타원면 $x^2 + 5y^2 = 5$ 주위를 시계방향으로 움직이고 $z = x^2 = 5\sin^2 t$ 이다.

그러므로 C 의 매끄러운 매개변수화는 $I = [0, 2\pi]$ 위에서 $\phi(t) = (\sqrt{5}\sin t, \cos t, 5\sin^2 t)$ 이다.

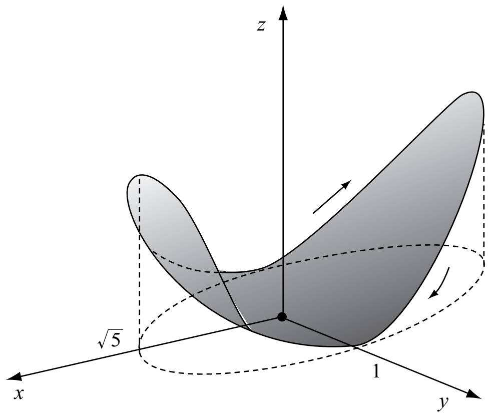

그림 8.6

보기 2 *xy-평면에서 $y = x$ 를 따라 멀리서 볼 때 방향이 오른쪽에서 왼쪽으로 방향인 $\mathbb{R}^3$ 에서 곡면 $z = x^2 - y^2$ 과 $x + y = 1$ 이 만나는 곡선 C 의 매끄러운 매개변수화를 찾아라.*

풀이 안장면 $z = x^2 - y^2$ 는 그 곡면을 가로질러 잘린 형태로 $x + y = 1$ 와 만난다. $x = t$ 를 오른쪽에서 왼쪽으로의 방향으로 하는 매개변수로 사용하여 $y = 1 - t$ 이고 $z = t^2 - (1 - t)^2 = 2t - 1$ 이다. 그러므로 C 의 매끄러운 매개변수화는 $I = \mathbb{R}$ 위에서 $\phi(t) = (t, 1 - t, 2t - 1)$ 이다. 특히, C 는 $(0, 1, -1)$ 을 지나고 방향이 $(1, -1, 2)$ 인 직선이다.

다음은 유체역학, 전자기학에서 자연스럽게 나타나는 적분이다.

정의 8.9 *$C = (\phi, I)$ 는 $\mathbb{R}^m$ 에서 매끄러운 단순호이고 $F : \phi(I) \to \mathbb{R}^m$ 는 연속이라 하자. 그러면 C를 따른 F 의 **방향 선적분(orientated line integral)**은*

$$\int_C F \cdot T\, ds := \int_{\phi(I)} F \cdot T\, ds := \int_{\phi(I)} F \cdot d\phi := \int_I F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt. \tag{8.4}$$

여기서 $T = \phi'(t)/\|\phi'(t)\|$ 은 C 의 접선벡터이고 $ds = \|\phi'(t)\|\, dt$ 은 C 와 관련된 호길이 전미분이다. 따라서 $F \cdot T\, ds = F \cdot \phi'(t)\, dt$ 이 된다. F 가 유체의 흐름을 나타낸다고 하면 $F \cdot T$ 는 F 의 접선성분이다. 즉, 접선 T 방향에 있는 유체흐름의 양이다. 예를 들어, C 를 시계 반대방향의 단위원이고 $F(x, y) = (-y, x)$ 라 가정하자. 점 (x, y) 에서 C 에 대한 단위 접벡터은 $(-y, x)$ 이고 F 는 T 와 같은 방향이다(그림 8.7). 따라서 $F \cdot T = 1$ 는 유체가 상반된다기 보다는 접선방향으로 흐른다는 것을 나타낸다. 한편,

$G(x,y) = (y,-x)$ 또는 $H(x,y) = (x,y)$ 이면 유체가 접선방향의 반대로 흐르기 때문에 $G \cdot T = -1$ 이고 유체의 흐름은 T 와 수직이므로 $H \cdot T = 0$ 이다(예를 들어, 같지도 않고 반대도 아니다)(그림 8.7). 그러므로 C 위에서 $F \cdot T ds$ 의 적분은 접선벡터 방향에서 C 주위로 F의 순환량이다. 만일 이 적분이 양이면 유체의 순흐름은 T 에 역행하기보다는 T 와 같이한다.

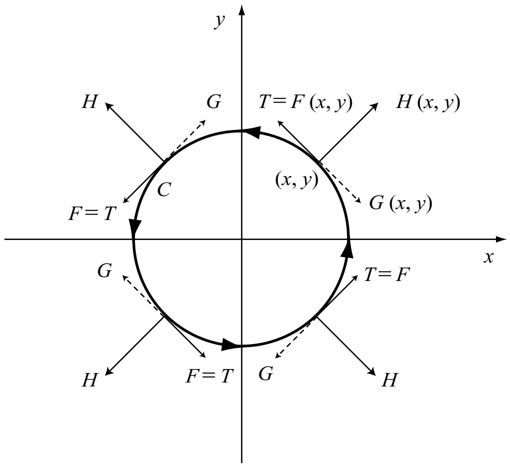

그림 8.7

정의 8.9 에 의하여 방향 선적분은 실함수의 적분이다. 그러므로 3장에서 연습한 방법으로 적분된다.

보기 3 $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in I = [0, 4\pi]$ *의 자취를 그리고* $F(x,y,z) = (\sin z, \cos z, xy)$ *이고* $C = (\phi, I)$ *일 때 다음 적분을 계산하여라.*

$$\int_C F \cdot T \, ds$$

풀이 $(x,y,z) = \phi(t)$ 라 하자. $x^2 + y^2 = 1$ 이므로 C 의 자취는 원기둥 $x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 4\pi$ 위에 놓인다. t 가 증가하면 점 (x,y) 는 단위원 $x^2 + y^2 = 1$ 주위를 시계 반대반향으로 돈다. 그러므로 ϕ 의 자취는 원기둥 $x^2 + y^2 = 1$ 주위를 도는 나선형이다(그림 8.8). t 가 0 부터 4π 까지 변할 때 나선형은 원기둥 주위를 두 번 돌고 z 는 0

부터 4π 까지 변한다. $\phi'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot T\, ds &= \int_0^{4\pi} F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (\sin t, \cos t, \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (-\sin^2 t + \cos^2 t + \sin t \cos t)\, dt = 0.\end{aligned}$$

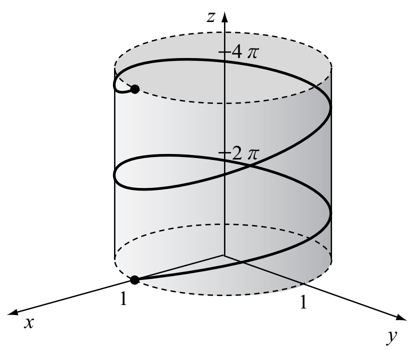

그림 8.8

다음은 선적분 $\int_C g\, ds$ 와는 달리 방향 선적분 $\int_C F \cdot T\, ds$ 는 같은 곡선의 서로 다른 매끄러운 동치 매개변수화에 대하여 다른 값이 된다는 것을 보여 준다.

참고 1 *만일 (ϕ, I) 와 (ψ, J) 는 매끄러운 동치이지만 방향 동치가 아닌 단순호라 하면*

$$\int_I F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = -\int_J F(\psi(u)) \cdot \psi'(u)\, du.$$

증명 τ 를 $\psi(J)$ 에서 $\phi(I)$ 로 가는 추이함수라 하자. τ'는 연속이고 0이 아니므로 τ'는 J 위에서 양이거나 음이거나 둘 중 하나이다. $\phi(I)$와 $\psi(J)$는 방향 동치가 아니므로 τ'는 J 위에서 음이다. 즉, 모든 $u \in J$에 대하여 $|\tau'(u)| = -\tau'(u)$. 따라서

$$\begin{aligned}\int_I F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt &= \int_J F(\phi(\tau(u)) \cdot \phi'(\tau(u))|\tau'(u)|\, du \\ &= -\int_J F(\psi(u)) \cdot \psi'(u)\, du.\end{aligned}$$

■

C 는 방향을 가진 곡선이라 하고 $-C$ 는 C 의 반대방향을 가진 곡선이라 하면 참고 1 로 부터

$$\int_{-C} F\cdot T\,ds = -\int_C F\cdot T\,ds$$

임을 알 수 있다. 같은 방법으로 방향적분(8.4)는 같은 곡선의 방향동치 매개변수화에 대해 같은 값을 준다는 것을 알 수 있다(연습문제 5).

보기 4 $F(x,y)=(xy,x)$ *이고* C *는 방향이 시계방향으로 주어진 단위원* $x^2+y^2=1$ *일 때 적분*

$$\int_C F\cdot T\,ds$$

을 구하여라.

풀이 C의 매개변수화 $\phi(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ 는 반시계방향을 갖는다(8.1절 연습문제 2). 그러므로 참고 1 에 의하여

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot T\,ds &= -\int_0^{2\pi}(\sin t\cos t,\cos t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t\cos t-\cos^2 t)\,dt=-\pi.\end{aligned}$$

미분기호를 사용하여 방향 적분(8.4)를 나타내어 보자. 만일 $x_j=\phi_j(t)$ 이면 $dx_j=\phi_j'(t)\,dt$이다. 그러므로 형식적으로 $F(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt$ 는

$$(F_1(\phi_1(t))\phi_1'(t)+\cdots+F_m(\phi(t))\phi_m'(t))\,dt=F_1\,dx_1+\cdots+F_m\,dx_m$$

와 같다. 이러한 표현을 $\mathbb{R}^m$에서 **제 1 형식(1-form)**이라 부르고 함수 F_j 를 **계수**라 한다. 제 1 형식은 각각의 계수가 집합 E 위에서 연속이면 제 1 형식이 E 위에서 **연속**이라 말한다. $\mathbb{R}^m$ 에 있는 매끄러운 단순호 $C=(\phi,I)$ 위에서 연속 제 1 형식의 방향적분은 $F=(F_1,\cdots,F_m)$ 일 때

$$\int_C F_1\,dx_1+\cdots+F_m\,dx_m := \int_{\phi(I)} F\cdot T\,ds$$

로 정의한다.

보기 5 C*는 방향이* $(0,0)$ *에서* (π,π^2) *로 주어진 곡선* $y=x^2+\sin x$ *일 때 적분값*

$$\int_C y\,dx+\cos x\,dy$$

을 구하여라.

풀이 $y = x^2 + \sin x$ 이고 $dy = (2x + \cos x)\, dx$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_C y\, dx + \cos x\, dy &= \int_0^\pi (x^2 + \sin x)\, dx + \int_0^\pi \cos x(2x + \cos x)\, dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} - 2.\end{aligned}$$

곡선위의 적분은 공간(또는 평면)내의 두 점을 연결하는 서로 다른 곡선에 대하여 적분값이 다를 수 있다(연습문제 7). 그러나 특별한 피적분함수에 대하여는 두 점을 연결하는 곡선에 상관없이 곡선위의 적분은 모두 같다. 따라서 이러한 함수에 대한 선적분값은 양 끝점에 의존한다. 이것은 일변수 함수에 관한 적분의 미적분학의 기본정리와 유사하다(연습문제 8). 그러나 항상 이러한 성질을 가지는 함수가 존재하는 것은 아니다. 실제로 이러한 함수가 존재하려면 함수의 정의역에 대한 위상적 성질 [3]이 중요하다.

$C = \cup_{j=1}^N C_j$는 $\mathbb{R}^m$ 에서 자취 E를 갖는 조각적으로 매끄러운 곡선이라 하자(8.1절 보기 5). 만일 $F : E \to \mathbb{R}^m$ 가 연속이면 C를 **따르는** F**의 방향 선적분은**

$$\int_C F \cdot T\, ds = \sum_{j=1}^N \int_{C_j} F \cdot T\, ds$$

으로 정의된다. 만일 ω가 E 위에서 연속인 제 1 형식이면, C를 **따르는** ω **의 방향 적분은**

$$\int_C \omega = \sum_{j=1}^N \int_{C_j} \omega$$

으로 정의된다.

보기 6 C는 $Q = [0, 1] \times [0, 1]$*의 경계이고 방향은 시계반대방향일 때 방향 선적분*

$$\int_C (x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy$$

의 값을 찾아라.

풀이 경계 $C = \partial Q$는 네 개의 매끄러운 조각으로 되어 있다(그림 8.9). C_1(직선 $x = 0$), C_2(직선 $y = 0$), C_3(직선 $x = 1$), C_4(직선 $y = 1$). C_1 에 대하여 $x = 0$ 이고 y는 1 부

3) 단순 연결영역(simply connected domain) 이나 별모양 영역이면 이러한 성질을 만족하는 함수가 존재함이 알려져 있다.[12]

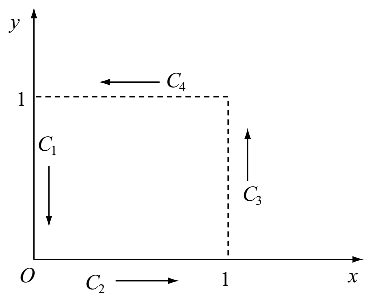

그림 8.9

터 0 까지(C 위에서 시계반대방향으로) 움직인다고 하자. 그러면

$$\int_{C_1} (x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = \int_1^0 y^2\,dy = -\frac{1}{3}.$$

마찬가지로, C_2, C_3, C_4 위에서의 적분은 각각 $0, 1/2, -2/3$ 이다. 그러므로

$$\int_C F \cdot T\,ds = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}.$$

연습문제 (8.2)

1. 각각의 $(\phi, \mathbb{R})$의 자취를 그리고, 방향을 묘사하고, 집합 S 의 부분집합임을 증명하여라.

   (a) $\phi(t) = (3t, 2\sin t, \cos t), \quad S = \{(x, y, z) : y^2 + 4z^2 = 4\}.$

   (b) $\phi(t) = (t^3, t^2, t^3), \quad S = \{(x, y, z) : z = x\}.$

   (c) $\phi(t) = (t, t^3, \sin t), \quad S = \{(x, y, z) : y = x^3\}.$

   (d) $\phi(t) = (\sin t, \sin t, \cos t), \quad S = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 1\}.$

   (e) $\phi(t) = (\cos t, \cos t, t), \quad S = \{(x, y, z) : y = x\}.$

2. 각각에 대하여 C의 (조각적으로)매끄러운 매개변수화를 찾고 $\int_C F\cdot T\,ds$를 계산하여라.

   (a) C는 $(1,1)$부터 $(2,8)$ 까지 곡선 $y=x^3$이고 $F(x,y)=(xy,y-x)$.

   (b) C는 타원기둥면 $y^2+2z^2=1$와 평면 $x=-1$과의 교집합, 방향은 양의 x-축에서 보았을 때 시계 반대방향이고, $F(x,y,z)=(\sqrt{x^3+y^3+5},z,x^2)$.

   (c) C는 굽은평면 $y=|x|$와 타원기둥 $x^2+3z^2=1$ 과의 교집합, 방향은 양의 y-축에서 보았을 때 시계 방향이고 $F(x,y,z)=(z,-z,x+y)$.

3. 다음 각각의 $\int_C \omega$를 계산하여라.

   (a) C는 경로가 $(1,1)$에서 $(2,1)$까지의 선분을 따라서 $(2,1)$에서 $(2,3)$까지의 다각형 경로이고 $\omega=y\,dx+x\,dy$.

   (b) C는 $z=x^2+y^2$과 $x^2+y^2+z^2=1$의 교집합이고 방향이 양의 z-축에서 보았을 때 시계반대방향이고 $\omega=dx+(x+y)\,dy+(x^2+xy+y^2)\,dz$.

   (c) C는 직사각형 $R=[a,b]\times[c,d]$ 의 경계이고 방향이 시계반대방향이고 $\omega=xy\,dx+(x+y)\,dy$.

   (d) C는 $y=x$와 $y=z^2$, $0\le z\le 1$의 교집합이고 방향은 y-축에서 보았을 때 왼쪽에서 오른쪽 방향이고 $\omega=\sqrt{x}\,dx+\cos y\,dy-dz$.

   (e) C 는 $y=2x^3$ 를 따라 $(0,0)$ 부터 $(1,2)$ 까지 잇는 곡선이고 $\omega=x^3y^2\,dx-2x^4y\,dy$.

   (f) C 는 $(0,0)$ 부터 (a,b) 까지 잇는 직선이고 $\omega=(y^2-y)\,dx+x\,dy$.

4. (a) $c\in\mathbb{R}$, $\delta>0$ 이고 $u\in\mathbb{R}$에 대하여 $\tau(u)=\delta u+c$라 놓자. 만일 (ϕ,I)이 매끄러운 곡선이고, $J=\tau^{-1}(I)$이고 $\tau(u)=\delta u+c$에 대하여 $\psi=\phi\circ\tau$이면 (ψ,J)는 (ϕ,I)와 방향 동치임을 증명하여라.

   (b) 만일 (ϕ,I)가 매끄러운 호이면 $(\psi,[0,1])$ 형태의 방향 동치인 매개변수화를 갖음을 증명하여라.

   (c) 조각적으로 매끄러운 곡선에 대하여 b)를 증명하여라.

   (d) C는 단위 정사각형 $[0,1]\times[0,1]$의 경계이고 방향이 시계반대방향이다. $[0,1]$에서 매개변수 C, 즉 $I_j=[(j-1)/4,j/4]$인 매개변수화 (ϕ_1,I_1), (ϕ_2,I_2), (ϕ_3,I_3), (ϕ_4,I_4) 를 찾아라.

5. (ϕ, I)는 매끄러운 단순호이고, τ는 유한개를 제외하고 모든 $u \in J$에 대하여 $\tau'(u) > 0$을 만족하는 J에서 I로 가는 1-1 인 $\mathcal{C}^1$함수라 가정하자. 만일 $\psi = \phi \circ \tau$이라 하면 임의의 연속함수 $F : \phi(I) \to \mathbb{R}^m$에 대하여

$$\int_I F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_J F(\psi(u)) \cdot \psi'(u)\, du$$

임을 증명하여라.

6. (8.5절을 이용하여라.) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$는 $[a, b]$ 위에서 $\mathcal{C}^1$ 이고 $t \in [a, b]$에 대하여 $f'(t) \neq 0$ 이다. y가 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변할 때 곡선 $x = f^{-1}(y)$는 x가 a에서 b까지 변할 때 곡선 $y = f(x)$와 방향동치임을 증명하여라.

7. 보기 5 에서 C 는 곡선 $y = x^2$ 을 따라 점 $(0, 0)$ 와 (π, π^2) 을 잇는 유향곡선일 때 적분값

$$\int_C y\, dx + \cos x\, dy$$

을 구하여라.

8. V 는 $\mathbb{R}^2$ 에서 열린집합이라 하자. 함수 $F : V \to \mathbb{R}^2$ 를 V 위에서 **보존적 (conservative)**이라 함은 V 위에서 $F = \nabla f$ 을 만족하는 함수 $f : V \to \mathbb{R}$ 가 존재하는 것이다. $(x, y) \in V$이고 $F = (P, Q) : V \to \mathbb{R}^2$는 V 위에서 연속이라 하자.

   (a) $C(x)$는 V안에서 (x, y)에서 끝나는 수평선분, 즉 $L((x_1, y); (x, y))$ 인 형태의 선분이고 방향은 (x_1, y)에서(x, y)로 주어진 자취가 V의 부분집합이라 가정하자.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{C(x)} F \cdot T\, ds = P(x, y)$$

   임을 증명하여라. V안에서 (x, y)에서 끝나는 수직선분에 대하여 $\partial/\partial y$에 대한 유사한 명제를 만들고 증명하여라.

   (b) $(x_0, y_0) \in V$라 하자. 모든 조각적으로 단순닫힌곡선 $C \subset V$에 대하여

$$(*) \qquad \int_C F \cdot T\, ds = 0$$

   일 필요충분조건은 모든 $(x, y) \in V$에 대하여 적분

$$f(x, y) := \int_{C(x,y)} F \cdot T\, ds$$

이 모든 $C(x,y)$에 대하여 같게 주어지는 것이다. 여기서 $C(x,y)$는 (x_0,y_0)에서 시작하여 (x,y)에서 끝나는, 자취가 V의 부분집합인 조각적으로 매끄러운 곡선이다.

(c) F가 V 위에서 보존일 필요충분조건은 자취가 V의 부분집합인 모든 조각적으로 매끄러운 닫힌곡선 C에 대하여 (*)가 성립하는 것임을 증명하여라.

(d) 자취가 V의 부분집합인 모든 조각적으로 매끄러운 닫힌곡선 C에 대하여 F가 (*)을 만족하면

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

임을 증명하여라. 참고 : 만일 영역 V가 좋으면 이 명제의 역도 역시 성립한다. (8.6절 연습문제 7)

(e) 영역 $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 에 정의된 제 1 형식

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

이 보존적이 아님을 보여라.

9. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$는 증가이고 $[0,1]$에서 연속적으로 미분가능하다고 가정하자. T는 꼭지점이 $(0,f(0))$, $(1,f(0))$, $(1,f(1))$인 직각 삼각형이라 하자. 만일 c가 T의 빗변을 나타내고, a와 b는 T의 다른 변을 나타내고, 그리고 L은 곡선 $y = f(x)$, $x \in [0,1]$의 호의 길이를 나타낸다 하면, $c \le L \le a+b$임을 증명하여라.

8.3 곡면

이 절에서는 곡면과 곡면적분에 관하여 정의하는데 이러한 개념은 8.1 절에서의 곡선과 선적분의 이차원적 유사성을 띤다. 매끄러운 호는 유계이고 닫힌구간에서 매개변수화됨을 상기하자. 무엇으로 매끄러운 곡면을 매개변수화하는가? $\mathbb{R}^2$에서 유계이고 닫힌집합의 어떤 형태를 이용하는 것이 필요하다. 비록 직사각형을 사용할 수 있지만 보다 편리한 2차원 영역을 사용한다. 이를 위해서 다음을 정의한다.

정의 8.10 m**차원 영역** *E 는 $\mathbb{R}^m$ 에서 공집합이 아닌 열린집합이며 연결된 조르단 영역 V 에 대하여 $E = \overline{V}$ 인 집합 $E \subset \mathbb{R}^m$ 이다.*

1차원 영역은 닫혀있고 유계인 구간임을 주목하자. 또 모든 2차원 직사각형과 모든 2차원 구의 폐포는 2차원 영역이다.

정의 8.11 (i) $\mathbb{R}^3$에 있는 $\mathcal{C}^p$ **곡면** S 는 E가 2차원 영역이고 $\phi : E \to \mathbb{R}^3$ 이 E 위에서 $\mathcal{C}^p$ 일 때 $S = (\phi, E)$이다. S의 **자취**는 집합 $\phi(E)$이다. 어떤 점 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$이 S위에 **놓여있다**는 것은 그것이 S의 자취에 속해 있을 때를 말한다.

(ii) 곡면 (ϕ, E) 가 **단순하다**는 것은 ϕ가 E 위에서 1-1 일 때를 말한다.

iii) 어떤 쌍 (ψ, B) 를 곡면 (ϕ, E) 의 $\mathcal{C}^p$ **매개변수화**라는 것은 (ψ, B) 가 $\mathcal{C}^p$ 단순곡면이고 $\psi(B) = \phi(E)$이다. 방정식

$$x = \psi_1(u, v),\ y = \psi_2(u, v),\ z = \psi_3(u, v), \quad (u, v) \in B$$

는 (ϕ, E)의 매개변수 (ψ, B)에 의하여 유도된 **매개변수방정식**이라 한다.

함수 $z = f(x, y)$의 그래프를 **곡면**이라 한다. 다음은 f 가 $\mathcal{C}^p$ 일 때 정의 8.11 에 적합하다는 것을 보여 주고 있다.

보기 1 E는 2차원 영역이고 $f : E \to \mathbb{R}$는 $\mathcal{C}^p$ 함수라 하자. $z = f(x, y)$의 그래프는 단순 $\mathcal{C}^p$ 곡면의 자취임을 증명하여라.

풀이 만일 $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$이면 ϕ는 $\mathcal{C}^p$이고 E 위에서 1-1 이다. 그리고 ϕ는 $z = f(x, y)$의 그래프이다. (이것을 $z = f(x, y)$ 의 **자명한 매개화**라고 부른다.)

비슷한 방법으로 $x = f(y, z)$이거나 $y = f(x, z)$인 형태의 매개변수화를 정의할 수 있다. 예를 들어 곡면 $x = f(y, z)$, $(y, z) \in E$의 매개변수화는 $\phi(u, v) = (f(u, v), u, v)$인 (ϕ, E)로 주어졌다.

아래의 보기는 원기둥, 구면, 원환면, 원뿔이 $\mathcal{C}^\infty$ 곡면임을 보이고 있다.

보기 2 원기둥 $x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 2$ 는 $\mathcal{C}^\infty$ 단순곡면의 자취임을 보여라.

풀이 $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ 이고 $E = [0, 2\pi] \times [0, 2]$ 라 하고 ϕ는 E 위에서 $\mathcal{C}^\infty$임에 주목하자. 매개방정식은 $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$ 이다. 분명히 $x^2 + y^2 = 1$ 이다. 그러므로 $\phi(E)$ 는 원기둥 $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 2$ 의 부분집합이다. E가 연결이므로 $\phi(E)$도 연결이다. $\phi(E)$가 원기둥 전체임을 보이기 위하여 E에서 수평선의 상을

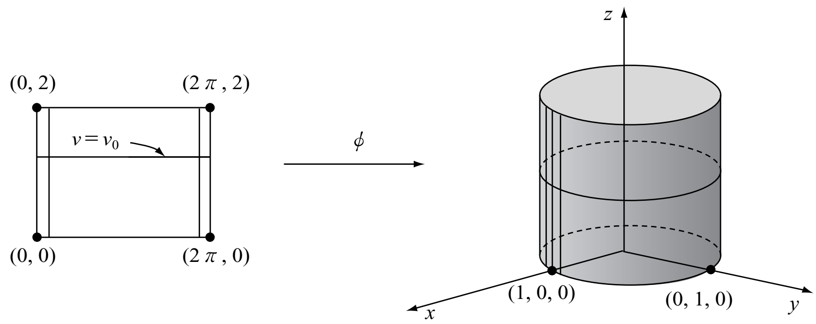

그림 8.10

보자. 선분 $v = v_0$의 상은 평면에 놓인 중심이 $(0, 0, v_0)$이고 반지름이 1인 원이다(그림 8.10). 그러므로 v_0의 범위가 0에서 2까지이므로 수평선 $v = v_0$의 상은 전체의 원기둥 $x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 2$ 를 덮는다.

보기 3 *구 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$는 $\mathcal{C}^\infty$ 곡면의 자취임을 보여라.*

풀이 $\phi(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ 이고 $E = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ 라 하자. 분명히 ϕ 는 E 위에서 $\mathcal{C}^\infty$ 이다. 매개방정식은 $x = a \cos u \cos v$, $y = a \sin u \cos v$, $z = a \sin v$ 이다. $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 v$ 이므로 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$을 얻는다. 그러므로 $\phi(E)$는 중심이 원점이고 반지름이 a인 구이다. 수평선 $v = v_0$의 상은 평면 $z = a \sin v_0$ 위에 놓인 원이고 중심이 $(0, 0, a \sin v_0)$ 이고 반지름이 $a \cos v_0$ 이다(그림 8.11).

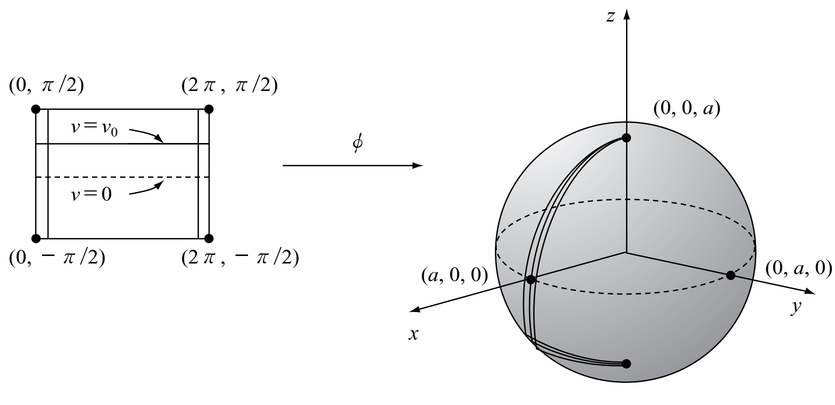

그림 8.11

E, 즉 수평선 $v = \pi/2$(각각, $v = -\pi/2$), 의 위꼭지(각각, 아래 꼭지)의 상은 북극점 $(0, 0, a)$(남극점$(0, 0, -a)$) 이다. 그러므로 v_0 의 범위는 $-\pi/2$ 에서 $\pi/2$ 까지 이므로 수평선 $v = v_0$ 의 상은 전체의 구 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 를 덮는다.

C는 xz-평면에서 중심이 $(a, 0, 0)$ 이고 반지름이 b 인 원을 나타낸다고 하자. 여기서 $a > b$이다. 반지를 $a > b$ 를 가진 중심이 원점인 원환면(torus)은 z-축에 대하여 곡선 C를 회전시킨 것은 도넛 모양의 곡면이다(그림 8.12).

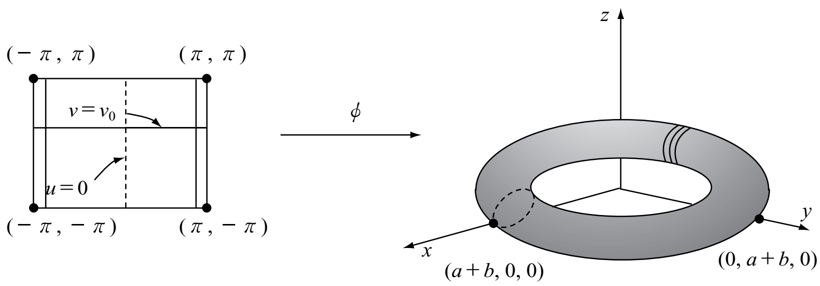

그림 8.12

보기 4 *반지름 $a > b$ 를 가진 중심이 원점인 원환면은 $\mathcal{C}^\infty$ 곡면의 자취임을 보여라.*

풀이 $\phi(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$ 이고 $E = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ 라 하고 ϕ 는 E 위에서 $\mathcal{C}^\infty$ 임에 주목하자. $u = 0$의 상은 xz-평면에서 중심이 $(a, 0, 0)$ 이고 반지름이 b인 원이다. 수평선 $v = v_0$의 상은 xy-평면과 나란하고 중심이 $(0, 0, b\sin v_0)$ 이고 반지름이 $a + b\cos v_0$ 이다. $v = \pm\pi$ 의 상은 xy-평면에서 중심이 $(0, 0, 0)$ 이고 반지름이 $a - b$인 원이다. 따라서 $\phi(E)$는 원환면 전체을 덮는다.

보기 5 *원뿔 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le b$ 는 $\mathcal{C}^\infty$ 곡면의 자취임을 보여라.*

풀이 $(x, y, z) = \phi(u, v) = (v\cos u, v\sin u, v)$ 이고 $E = [0, 2\pi] \times [0, b]$ 라 하자. 그리고 ϕ는 E 위에서 $\mathcal{C}^\infty$임에 주목하자. 분명히 $x^2 + y^2 = z^2$ 이고 $0 \le z \le b$ 이다. 그러므로 $\phi(E)$ 는 주어진 원뿔의 부분집합이다. $0 \le v_0 \le b$ 인 수평선 $v = v_0$의 상은 평면 $z = v_0$ 에 있는 중심이 $(0, 0, v_0)$ 이고 반지름이 v_0 인 원이다(그림 8.13). 그러므로 $\phi(E)$ 는 원뿔 $z = \sqrt{x^2 + y^2 = z^2}, 0 \le z \le b$ 이다. 선 $v = 0$ 의 상은 꼭지점 $(0, 0, 0)$이다.

(x_0, y_0, z_0)의 근방에서 S의 자취가 미분가능한 함수의 그래프이면 곡면 $S = (\phi, E)$는 점 $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$ 에서 **유일한 접평면**을 갖는다고 말한다.

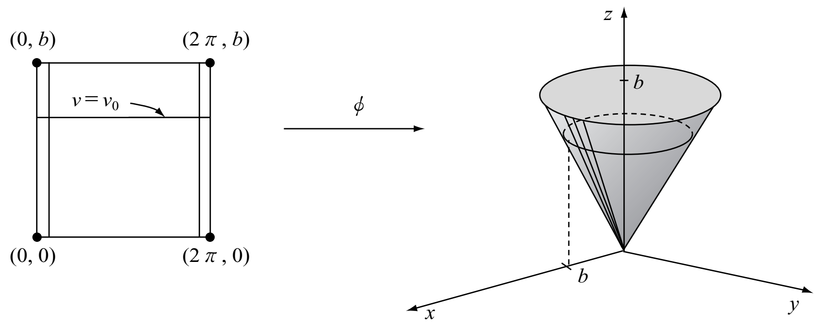

그림 8.13

$(u_0, v_0) \in E^o$ 일 때 이것은 $(u_0, v_0) \in E_0 \subset E$ 인 열린집합 E_0 와 V 그리고 미분가능한 함수 $f : V \to \mathbb{R}$이 존재하여 다음 세 조건:

I. $(x_0, y_0) \in V$이고, $z = f(x, y)$의 그래프가 $\phi(E_0)$와 일치;

II. $(x_0, z_0) \in V$이고 $y = f(x, z)$의 그래프가 $\phi(E_0)$와 일치;

III. $(y_0, z_0) \in V$이고 $x = f(y, z)$의 그래프가 $\phi(E_0)$와 일치;

중의 하나를 만족함을 뜻한다. 이 경우, f 에의해 만들어진 곡면의 접평면을 (x_0, y_0, z_0)에서 S의 **접평면**이라 한다. 그리고 S의 **법선벡터**는 6.1절의 참고 1 또는 정리 6.25를 적용해서 계산할 수 있다.

보기 6 *S의 자취가 $x = f(y, z)$의 그래프일 때 접평면의 법선은 $(1, -f_y(y_0, z_0), -f_z(y_0, z_0))$ 이다.*

접선벡터가 곡선에서 했던 동일한 역할을 법선벡터가 곡면에서는 맡는다. 예를 들어, 곡면의 넓이, 매끄러운 곡면, 곡면의 방향을 결정하기 위해 법선벡터를 사용한다. 우리는 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ 의 외적 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ 이 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{y}$ 가 이루는 평면에 수직임을 알고 있다(5.1 절 연습문제 7). 다음은 매개변수형식으로 주어진 곡면의 법선벡터를 계산하는 방법이다.

참고 1 *$S = (\phi, E)$ 를 $p \geq 1$인 $\mathcal{C}^p$ 곡면이라 하고 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 라 하자. 만일 $(u_0, v_0) \in E^o$ 에 대하여 S가 $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$에서 유일한 접평면을 갖는다면 (x_0, y_0, z_0)에서 S의 법선벡터는*

$$N_\phi := \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0).$$

증명 8.1절의 참고 1에 의하여 $\phi_u(u_0, v_0)$ 는 (x_0, y_0, z_0) 에서 곡선 $\phi(u, v_0)$의 접선벡터이고 $\phi_v(u_0, v_0)$는 (x_0, y_0, z_0)에서 곡선 $\phi(u_0, v)$ 의 접선벡터이다. 따라서 (x_0, y_0, z_0)에서의 접평면에 대한 법선은 이러한 두 벡터의 외적에 의하여 주어진다(그림 8.14). 그러므로 $\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$는 (x_0, y_0, z_0)에서 S의 법선벡터이다. ■

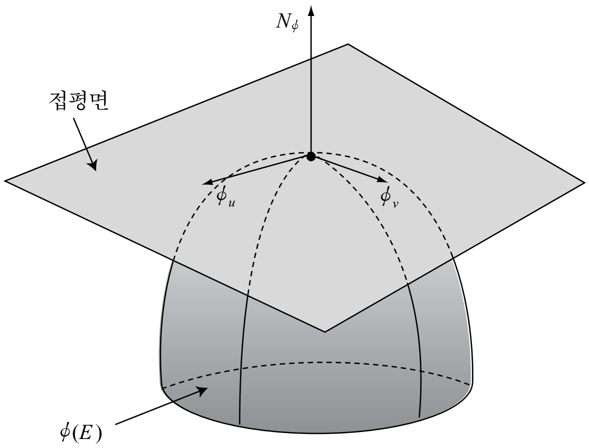

그림 8.14

$z = f(x, y)$ 이 곡면이고 $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ 이 곡면의 자명한 매개화이면 $N_\phi = (-f_x, -f_y, 1)$ 이다. 이것은 정리 6.25 와 6.1 절의 참고 1과 동일하다.

ϕ'를 N_ϕ로 대체함으로 해서 앞의 두 절에서 언급한 곡선의 이론과 유사한 곡면의 이론을 전개할 수 있다. 정의 8.3과 다음 정의를 비교하여 보자.

정의 8.12 *$p \geq 1$일 때 (ϕ, E) 를 $\mathcal{C}^p$ 곡면 또는 $\mathcal{C}^p$ 매개변수라 하자.*

(i) $N_\phi(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ *이면 (즉, $\|N_\phi(u_0, v_0)\| > 0$ 이면)* (ϕ, E)는 $(u_0, v_0) \in E$ **에서 매끄럽다**고 *말한다.*

(ii) (ϕ, E)*가 E의 각 점에서 매끄럽다면* (ϕ, E)는 **매끄럽다**고 *말한다.*

(iii) (ϕ, E)*가 $E \setminus E_0$의 각각의 점에서 매끄러우면 집합 $E_0 \subset E$ 을 제외하고 매끄럽다고 말한다.*

곡면 $z = f(x, y)$는 항상 매끄럽다는 사실에 주의하여라.

곡선에서와 같이 $(u_0, v_0) \in E^o$에서 $\phi(u_0, v_0)$의 접평면을 갖지 않는 곡면 (ϕ, E)는 (u_0, v_0)에서 매끄러울 수 없다(연습문제 7). 한편으로 매끄럽지 않은 매개변수 표현을

갖는 곡면의 각 점에서 접평면을 갖는 곡면이 있다. 예를 들어, 보기 3에서 구의 매개변수 표현 ϕ 는

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \|(a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v)\| = a^2 |\cos v|$$

를 만족한다. 그러므로 구가 그것의 자취의 각 점에서 접평면을 갖는다 하더라도 매개변수표현 (ϕ, E) 는 $v = \pm\pi/2$ 에서 매끄럽지 않다(이 매개변수 표현은 직선 $v = \pm\pi/2$을 북극과 남극으로 취하고 있기 때문에 1-1이 아니다). 특히, 여기에서 정의한 것처럼 매끄럽다는 것은 곡면의 형태가 아니라 매개변수표현에 의존한다.

다음으로 매개변수의 변환에 의한 법선벡터 N_ϕ의 변화를 계산한다.

정리 8.2 *E, B 는 $\mathbb{R}^2$ 에서 2-차원 영역이고 (ϕ, E), (ψ, B) 는 $\mathbb{R}^3$ 에서 $\mathcal{C}^p$ 곡면이고 $p \geq 1$ 라 하자. 만일 τ가 $\psi = \phi \circ \tau$ 인 B에서 E 로 가는 $\mathcal{C}^p$ 함수이면, 각각의 $u, v \in B$ 에 대하여*

$$N_\psi(u, v) = \Delta_\tau(u, v) N_\phi(\tau(u, v)).$$

증명 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ 라 하자. 참고 1 에 의하여

$$N_\psi = (\Delta_{(\psi_2, \psi_3)}, \Delta_{(\psi_3, \psi_1)}, \Delta_{(\psi_1, \psi_2)}).$$

가정에 의하여 $\psi = \phi \circ \tau$ 이므로, 즉 $i, j = 1, 2, 3$ 에 대하여 $(\psi_i, \psi_j) = (\phi_i, \phi_j) \circ \tau$ 이고 연쇄법칙으로부터 모든 $u, v \in B$ 에 대하여

$$\Delta_{(\psi_i, \psi_j)}(u, v) = \Delta_\tau(u, v) \Delta_{(\phi_i, \phi_j)}(\tau(u, v))$$

그러므로 B 위에서 $N_\psi = \Delta_\tau(N_\phi \circ \tau)$. ■

위 정리는 다음 정의를 유도한다(정의 8.6 와 비교).

정의 8.13 *$p \geq 1$라 하자. 두 개의 매끄러운 $\mathcal{C}^p$ 곡면 (ϕ, E), (ψ, B)를* **매끄러운 동치***라 함은 $\psi(B) = \phi(E)$ 이고 B 에서 E 로 가는 1-1 $\mathcal{C}^p$ 함수 τ 가 존재하여 $\psi = \phi \circ \tau$ 이고 모든 $(u, v) \in B$ 에 대하여 $\Delta_\tau(u, v) \neq 0$ 를 만족한다. 이러한 함수 τ 를 $\psi(B)$ 에서 $\phi(E)$ 로의* **추이***라 한다.*

만일 두 곡면이 매끄럽게 동치이면 하나가 단순일 필요충분조건은 다른 하나가 단순이어야 한다(8.4절 연습문제 5)

정리8.1, 정의8.7처럼 유사하게 곡면넓이와 곡면적분을 다음과 같이 정의한다.

정의 8.14 $S = (\phi, E)$ 는 법선벡터 $N_\phi = \phi_u \times \phi_v$ 를 가지는 매끄러운 단순곡면이라 하자.

(i) 곡면 S의 면적을

$$\sigma(S) := \int_E \|N_\phi(u, v)\| \, d(u, v)$$

으로 정의한다.

(ii) 만일 $g : \phi(E) \to \mathbb{R}$ 가 연속이면 S 위에서 g의 곡면적분을

$$\iint_S g \, d\sigma := \iint_{\phi(E)} g \, d\sigma := \int_E g(\phi(u, v)) \|N_\phi(u, v)\| \, d(u, v) \tag{8.5}$$

으로 정의한다.

따름정리 7.9 에 의하여, (ϕ, E)이 면적이 0인 집합을 제외하고 1-1 이거나 면적이 0인 집합 위에서는 $N_\phi(u, v)$ 는 정의되지 않더라도 (8.5) 는 정의된다. 특히 (ϕ, E) 이 면적이 0 인 어떤 집합 Z 을 제외한 곳에서 매끄럽고 단순하면 (8.5) 는 정의된다. 그러므로 이러한 개념들은 모든 원뿔과 구들을 포함하는 매끄럽지 않고 단순하지도 않은 곡면들로 확장시킬 수 있다.

$z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$ 에 의하여 주어진 $\mathcal{C}^p$ 곡면 S 에 대하여 적분 (8.5) 는 다음과 같은 형태를 취한다.

$$\iint_S g d\sigma = \int_E g(x, y) \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, d(x, y). \tag{8.6}$$

선분을 근사시키는 방법으로 호의 길이를 정의하는 것과 마찬가지로, S의 곡면의 면적은 평면 영역을 근사시킴으로써 정의할 수 있다. 그러나 이러한 접근은 어떤 제한이 있다. 즉, 삼각형의 영역을 사용하여 원기둥의 경계로 접근시킬 때 접근 영역의 전체 면적은 무한이 될 수 있다[12].

곡면의 면적과 곡면 적분은 비록 $\Delta_\tau \neq 0$라는 조건이 면적이 0 인 닫힌집합 위에서 완화되더라도 매끄러운 동치 매개변수화하에서 불변이라는 것을 보이는 것은 쉽다(연습문제 5). 또한 S의 자취가 $\mathbb{R}^2$의 부분집합이면 정의 8.12 에서 정의된 곡면의 면적은 정의 7.2에서 정의된 S의 자취의 면적과 같다(연습문제 4).

곡면 적분을 계산할 때 주어진 곡면의 적절한 매개변수를 찾아야 하고 정의 8.14 를 이용한다.

보기 7 S는 반구 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 이고 $g(x, y, z) = \sqrt[3]{z}$ 일 때 $\iint_S g \, d\sigma$ 를 구하여라.

풀이 ϕ를 보기 3 에서 정의된 함수라 하고 $E_0 = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$ 라 하자. 그러면 (ϕ, E_0) 는 반구 S의 매개변수화이고 $\|N_\phi\| = a^2 \cos v$ 이다. $v \in [0, 2\pi)$ 에 대하여 $\cos v \neq 0$ 이므로 $\phi(E_0)$ 는 면적이 0 인 $[0, 2\pi] \times \{\pi/2\}$ 밖에서 매끄럽다. 그러므로

$$\begin{aligned}\iint_S g\,d\sigma &= \iint_{E_0} a^2 \cos v \sqrt[3]{a \sin v}\,du\,dv \\ &= 2\pi a^{7/3} \int_0^{\pi/2} \cos v \sqrt[3]{\sin v}\,dv = \frac{3\pi}{2} a^{7/3}.\end{aligned}$$

g의 연속성은 단지 (8.5)의 오른쪽 적분의 의미를 갖도록 정의 8.14 에서 가정되었다. 만일 반복적분의 하나가 이상적분으로 수렴하면 명백한 방법으로 곡면적분의 정의를 확장할 수 있다. 이러한 것을 이용하여 보기 7 을 자명한 매개변수화를 사용하여 두 번째 방법의 해를 구할 수 있다.

다른 풀이: 곡면 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 는 법선 $N = (-z_x, -z_y, 1) = (x/z, y/z, 1)$ 을 갖는다. (이 법선은 $\partial B_a(0,0)$ 위에서 존재하지 않지만 $\partial B_a(0,0)$이 면적이 영인 집합이므로 $B_a(0,0)$ 위에서 적분할 때 무시할 수 있다.) S 위에서 $\|N\| = a/z$ 이다. 그러므로 (8.6)과 극좌표에 의해

$$\begin{aligned}\iint_S g\,d\delta &= \int_{B_a(0,0)} \frac{a\sqrt[3]{z}}{z}\,d(u,v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r(a^2 - r^2)^{-1/3}\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2} a^{7/3}.\end{aligned}$$

(이 가운데 r 에 대한 내부적분이 이상적분이다.)

곡면의 이론은 곡선의 이론보다 더 복잡하고 조각적으로 매끄러운 곡면이 되는 것을 의미하는 것을 포함하는 여러 가지 개념들을 정의하기 위하여 엄밀한 문장보다는 덜 엄밀한 기하학적인 묘사를 사용할 것이다.

다양하고 매끄러운 곡면의 조각들과 함께 조각적으로 매끄러운 형태를 어떻게 묘사하느냐에 앞서 내점(곡면의 내부에 놓인점)과 경계점(곡면의 모서리에 놓인점)과의 사이를 구별하여야 한다. 그 차이점을 설명하기 위해서 보기 2 에서 (ϕ, E)에 의해 매개변수화된 원기둥 S를 생각하자. 한 점 $(x, y, z) \in S$ 이 $0 < z < 2$ 이면 내부에 있고 $z = 0$ 또는 $z = 2$ 이면 모서리에 있다. (그림 8.8를 보고 왜 이러한 용어는 적당한가를 생각해 보라).

만일 $(x, y, z) \in \phi(E^o)$ 이면 (x, y, z) 은 (ϕ, E) 의 내부에 놓여있을 것이라고 추측할 것이다. 이 추측은 심지어 원통에서도 틀린 것이다. 예를 들어, $(-1, 0, 1) = \phi(\pi, 1) \in$

$\phi(E^o)$ 은 모서리가 아닌 S 의 이음매에 놓여있다. 일반 곡면 S의 내부와 경계를 정의하기 위하여 S의 자취를 사용하여야 하며 곡면이 특별한 매개변수화 (ϕ, E)에 의해 완전히 기술된 초기 위치로 되돌아 가야한다.

S를 $\mathbb{R}^3$ 의 $\mathcal{C}^p$ 곡면이라 하자. 당신이 점 $(x, y, z) \in S$ 에 서있다고 상상해 보라. 당신이 S 의 점들에 의한 모든 변들로 둘러싸여 있으면 점 (x, y, z) 를 S의 **내부**라 한다. 즉, 어느 방향으로 충분히 작게 움직여도 S에 머무른다. 곡면 S의 내부의 점들을 $\text{Int}(S)$로 나타내고 곡면 S의 **(다양체)경계**를 $\partial S := S \setminus \text{Int}(S)$ 로 정의한다.

비록 그 개념이 같지 않더라도 곡면의 경계를 어떤 집합의 경계(정의 5.7)와 같은 기호를 사용했다. 모든 고차원 미적분에 관한 기본정리의 명제는 이것을 바탕으로 하기 때문에 이러한 선택을 할 수 있다. 모호함을 피하기 위하여 집합 E의 경계 $(\overline{E} \setminus E^o)$를 E의 **위상경계(topological boundary)**라 말한다. 단지 곡면과 관련된 '경계'는 다양체 경계이고 m-차원 영역에서의 경계는 위상경계이다.

어떤 곡면 S가 $\partial S = \emptyset$ 이면 **닫혀있다**고 말한다. 예를 들어, $a > 0$ 이면 구 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$은 닫혀있다, 그러나 반구 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (각각, 끝이 잘린 포물면 $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1$)는 닫혀있지 않다. 왜냐하면 그 경계가 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ (각각, $x^2 + y^2 = 1, z = 1$) 이기 때문이다.

조르단 곡선정리에 의하면 닫혀있는 매끄러운 곡선 C는 $\mathbb{R}^2$을 두 개의 서로 소인 집합, 즉, C에 의하여 **둘러싸여있는** 점들과 C **밖에 놓여있는** 점들의 집합으로 나뉜다. 일반적으로 곡면의 경우에는 성립하지 않는다. 실제로, 둘러싸는 점들이 없는 닫힌 매끄러운 곡면(클라인 병)이 존재해서 $\mathbb{R}^3$을 두 개의 서로 소인 집합으로 나누지 못한다. 그러나 $\mathbb{R}^n$ 의 구면 $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\}$ 은 $\mathbb{R}^n$ 공간을 내부와 외부로 나눈다.

각각의 $S_j = (\phi_j, E_j)$가 매끄러운 단순곡면일 때 $S = \cup_{j=1}^N S_j$ 라 하자. S가 다음 조건

I. 각 $j \neq k$에 대하여 S_j와 S_k의 자취가 서로 소인 경우(예를 들어, 관 $0 < a \le \|(x, y, z)\| \le b$의 위상경계는 매끄러운 곡면이다).

II. 모든 S_j들은 겹쳐지지 않는다, 즉 $\phi_j(E_j^o) \cap \phi_k(E_k^o) = \emptyset$이고 각 S_j 의 경계의 일부는 어떤 S_k의 경계의 일부와 짝지어진다(예를 들어, 3차원의 직육면체의 위상적 경계는 조각적으로 매끄러운 곡면이다).

중 하나을 만족하면 **조각적으로 매끄럽다**고 한다. 우리는 어떤 세 개의 S_j 들의 교집합이 공집합이거나 유한인 경우로 제한하여 다루고자 한다. 이것은 조각적으로 매끄

러운 곡면을 임의로 주어진 모서리를 따라서 한 번이상 자신위에 뒤로 겹치는 것을 막는다. 조건 I 을 만족하는 곡면을 **연결되지 않은 조각적으로 매끄러운 곡면**, 조건 II 을 만족하는 곡면을 **연결된 조각적으로 매끄러운 곡면**이라 부른다.

조각적으로 매끄러운 곡면 $S = \cup_{j=1}^{N} S_j$의 **자취**는 S_j의 자취의 합집합으로 정의한다. 만일 S가 연결되지 않은 조각적으로 매끄러운 곡면이라면 S의 경계 ∂S 는 경계 ∂S_j들의 합집합으로 정의한다. 만일 S가 연결된 조각적으로 매끄러운 곡면이라면 S의 경계 ∂S 는 ∂S_j 의 부분에 짝지어지지 않는 것의 폐포에 속하는 모든 점들의 합집합으로 정의한다.

보기 8 *단위입방체* $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$*에서 표면* $z = 1$*을 제외한 형태의 상자의 경계는 평면* $z = 1$ *에서 단위사각형이고,* $x^2 + y^2 = 1$, $-3 \le z \le 0$ *와* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *의 합집합의 경계는 평면* $z = -3$*에서 단위원이다*

$S = \cup_{j=1}^{N} S_j$의 **조각적으로 매끄러운 매개변수화**는 $S_j = (\phi_j, E_j)$일 때 매끄러운 매개변수화 (ϕ_j, E_j) 의 모임이다. S의 곡면 면적은

$$\sigma(S) = \sum_{j=1}^{N} \sigma(S_j)$$

으로 정의되고, S의 자취 위에서 실수값을 갖는 함수 g의 **곡면적분**은

$$\iint_S g\, d\sigma = \sum_{j=1}^{N} \iint_{S_j} g\, d\sigma$$

으로 정의한다.

보기 9 $x = 0, y = 0, z = 0$ *그리고* $x + y + z = 1$ *로 둘러싸인 사면체* S *의 조각적으로 매끄러운 매개변수화를 찾고* $g(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ *에서* $\iint_S g\, d\sigma$ *를 계산하여라.*

풀이 사면체 S는 네 면을 가진다. 각 면들은 $(u, v) \in E$ 일 때 $\phi_1(u, v) = (u, v, 0)$, $\phi_2(u, v) = (0, u, v)$, $\phi_3(u, v) = (u, 0, v)$, $\phi_4(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ 에 의하여 매개변수화되고 꼭지점이 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 인 삼각형 영역이다. $j = 1, 2, 3$ 에 대하여

$\|N_{\phi_j}\| = 1$ 이고 $\|N_{\phi_4}\| = \sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\iint_S g\,d\sigma \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} (u+v^2)\,dv\,du + \int_0^1 \int_0^{1-u} (u^2+v^3)\,dv\,du \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^{1-u} (u+v^3)\,dv\,du + \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-u} (u+v^2+(1-u-v)^3)\,dv\,du \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} ((2+\sqrt{3})u + u^2 + (1+\sqrt{3})v^2 + 2v^3 + \sqrt{3}(1-u-v)^3)\,dv\,du \\
&= \int_0^1 ((2+\sqrt{3})u - (1+\sqrt{3})u^2 - u^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{3}(1-u)^3 + \frac{2+\sqrt{3}}{4}(1-u)^4)\,du \\
&= \frac{3}{10}(2+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

연습문제 (8.3)

1. 다음 각 S 의 곡면 면적을 구하여라.

   (a) S 는 $a \le z \le b$일 때 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 로 주어진 원추형 껍질

   (b) S 는 보기 3 에서 주어진 구

   (c) S 는 보기 4 에서 주어진 원환면

2. 다음 각 S 의 (조각적으로)매끄러운 매개변수화, ∂S를 구하고 $\iint_S g\,d\sigma$를 계산하여라.

   (a) S는 xy-평면위에, 평면 $x = 1$ 과 $x = -1$ 사이에 놓여 있는 곡면 $z = x^2 - y^2$ 의 일부이고 $g(x,y,z) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$

   (b) S는 곡면 $y = x^3$, $0 \le y \le 8$, $0 \le z \le 4$ 이고 $g(x,y,z) = x^3 z$

   (c) S는 원기둥 $2x^2 + 2y^2 = 9$ 의 외부에 놓여 있는 반구 $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ 의 일부이고 $g(x,y,z) = x+y+z$

3. 다음 위상경계 ∂E를 제외하고 매끄러운 타원면
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
의 매개변수화 (ϕ, E)를 찾아라.

4. (a) E는 2차원 영역이고 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in E,\ z=0\}$ 라 가정하자.
$$\text{Area}(E)=\iint_S d\sigma$$
이고 각각의 연속함수 $g: S\to\mathbb{R}$ 에 대하여
$$\iint_S g d\sigma=\int_E g(x,y,0)\,d(x,y)$$
임을 증명하여라.

(b) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$는 $p\geq 1$에 대해 $\mathcal{C}^p$ 함수이고 C는 $z=f(x)$, $a\leq x\leq b$에 의하여 결정된 $\mathbb{R}^2$내의 곡선이고, S는 $z=f(x)$, $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$에 의하여 결정된 $\mathbb{R}^3$내의 곡면이라 하자. $\sigma(S)=(d-c)L(C)$ 임을 증명하여라.

(c) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$는 $p\geq 1$에 대해 $\mathcal{C}^p$ 함수이고 S는 곡선 $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$ 를 y축에 관하여 회전에 의하여 얻어진 곡면이다. 곡면 S의 면적은
$$\sigma(S)=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx$$
임을 증명하여라.

5. (ψ,B) 와 (ϕ,E) 는 단순 $\mathcal{C}^p$ 곡면이고 Z는 면적이 영인 B의 닫힌 부분집합이고 (ψ,B)는 Z 밖에서 매끄럽고 $\tau: B\to\mathbb{R}^2$는 B에서 E 위로가는 $\mathcal{C}^1$ 함수라 가정하자. 만일 τ가 1-1이고 $B^\circ\setminus Z$ 위에서 $\Delta_\tau\neq 0$ 이고 $\psi=\phi\circ\tau$이면, 모든 연속함수 $g:\phi(E)\to\mathbb{R}$ 에 대하여
$$\iint_E g(\phi(u,v))\|N_\phi(u,v)\|\,du\,dv=\iint_B g(\psi(s,t))\|N_\psi(s,t)\|\,ds\,dt$$
임을 증명하여라.

6. 모든 $(x,y)\in B_3(0,0)$ 에 대하여 $f:B_3(0,0)\to\mathbb{R}$ 는 미분가능하고 $\|\nabla f(x,y)\|\leq 1$라 가정하자. 만일 S가 포물면 $2z=x^2+y^2$, $0\leq z\leq 4$ 이면
$$\iint_S|f(x,y)-f(0,0)|\,d\sigma\leq 40\pi$$
임을 증명하여라.

7. (ϕ, E)가 $\mathcal{C}^p$ 곡면 이고 $(u_0, v_0) \in E^o$ 일 때 $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$ 라 가정하자. 만일 (ϕ, E) 이 (x_0, y_0, z_0) 에서 접평면을 갖지 않는다면 $N_\phi(u_0, v_0) = \mathbf{0}$ 임을 증명하여라.

8. $S = (\psi, B)$는 매끄러운 단순곡면이라 하자. $E = \|\psi_u\|$, $F = \psi_u \cdot \psi_v$, $G = \|\psi_v\|$ 라 놓자. 곡면 S의 면적은

$$\int_B \sqrt{E^2G^2 - F^2}\, d(u, v)$$

임을 증명하여라.

9. $S = (\phi, E)$ 는 $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$ 에서 매끄러운 $\mathcal{C}^1$ 곡면이라 가정하자. $C = (\psi, I)$ 는 (u_0, v_0) 점을 지나면서 자취가 E 의 부분집합인 $\mathcal{C}^1$ 곡선이라 하자. (즉 $\psi(t_0) = (u_0, v_0)$ 인 $t_0 \in I$ 가 존재한다.) $(\phi \circ \psi)'(t_0) \cdot (\phi_u \times \phi_v)(u_0, v_0) = 0$ 임을 증명하여라.

8.4 유향곡면

매끄러운 단순곡선 (ϕ, I)은 양의 방향을 선택한 접선벡터 $\phi'(t)$ 에 의해 방향이 결정된다. 이는 연결곡선은 오직 두 방향으로 진행할 수 있기 때문이다. 비슷하게, 매끄러운 단순곡면 (ϕ, E) 는 S 의 양의 측면을 택한 법선벡터 N_ϕ 을 사용하여 방향을 결정한다. 연결곡면 S 에 대하여, 만약 S가 오직 두 개의 면을 갖는다면 그러한 선택은 가능하다.

그런데 오직 한 면만을 가진 매끄러운 연결곡면들이 있다. 이러한 곡면은 길고 가는 종이띠를 한쪽 끝을 비틀어 양쪽을 붙여 만들 수 있다. 이 곡면을 **뫼비우스 띠**라 고 한다.

보기 1 (뫼비우스 띠) *다음 곡면 (ϕ, E) 의 자취를 그려라.*

$$\phi(u, v) = ((2 + v\sin(u/2))\cos u, (2 + v\sin(u/2)\sin u, v\cos(u/2)),$$

여기서 $E = [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ 이다.

풀이 ϕ 하에서 수평선 $v = 0$ 의 상은 $(2\cos u, 2\sin u, 0)$ 이다. 즉 xy-평면에서 중심이 원점이고 반지름 2인 원이다. 수직선 $u = u_0$ 의 상은 $\mathbb{R}^3$ 에서의 선분이다. 예를 들어, $u = 0$ 의 상은 $(2, 0, v)$, $-1 \le v \le 1$ 이다. 그리고 $u = \pm\pi$ 의 상은 $(2 \mp v, 0, 0)$, $-1 \le v \le 1$. 즉 집합 $S_0 := \{(x, 0, 0) \ : \ -3 \le x \le -1\}$ 이다. 그러므로 (ϕ, E)의 자취는 그림 8.15 과 같다.

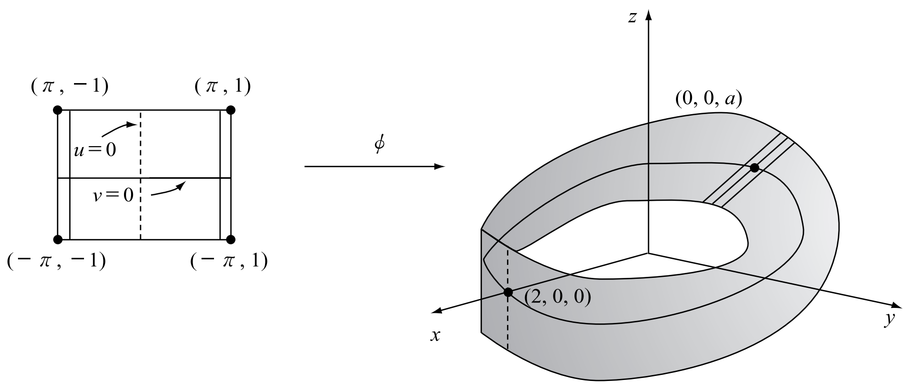

그림 8.15

이러한 예외적인 경우을 피하기 위해, 다음 개념들을 소개한다.

매끄러운 곡면 $S = (\phi, E)$ 위의 점 (x_0, y_0, z_0) 에서 S 의 **단위 법선벡터**는 $\mathbf{n}(x_0, y_0, z_0) = N_\phi(u_0, v_0)/\|N_\phi(u_0, v_0)\|$ 이다. 여기서 $\phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

명백히 단위 법선벡터 $\mathbf{n}$ 은 $j = 0, 1$ 에 대하여 $\phi(u_j, v_j) = (x_0, y_0, z_0)$ 를 만족하는 모든 $(u_j, v_j) \in E$ 에 대하여

$$\frac{N_\phi(u_0, v_0)}{\|N_\phi(u_0, v_0)\|} = \frac{N_\phi(u_1, v_1)}{\|N_\phi(u_1, v_1)\|} \neq \mathbf{0}$$

일 때만 잘 정의된다. 이것은 ϕ 가 일대일이고 E 에서 매끄러울 때 확실한 경우일 것이다. 만약 ϕ 가 E 위에서 일대일이 아니라면 단위법선벡터 $\mathbf{n}$ 은 ϕ 가 E 위에서 매끄럽다 하더라도 잘 정의되지 않을 수도 있다(위의 뫼비우스 띠를 보라).

매끄러운 곡면 $S = (\phi, E)$ 위에서 연속적으로 변하도록 곡면 S 위의 각 점에서 단위법선벡터 $\mathbf{n}$ 이 명확하게 정의될 수 있다면, 즉 $\phi(u_0, v_0) = \phi(u_1, v_1)$ 이면 $N_\phi(u_0, v_0)$ 은 $N_\phi(u_1, v_1)$ 과 같은 방향이며, (u_2, v_2) 가 (u_0, v_0) 에 가까이 있다면 $N_\phi(u_2, v_2)$ 이 근사적으로 $N_\phi(u_0, v_0)$ 와 같은 방향이면 S 를 **유향적(orientable)**이라고 말한다. 뫼비우스띠에서 N_ϕ는 '이음매'에서 그 방향이 동시에 서로 반대이다.

S 가 연결되어 있고 유향적이고 매끄럽다면 S 는 오직 두 개의 면, 하나의 양의 면(**n** 이 있는 쪽)과 음의 면(반대 면)을 갖는다는 것에 주의해라. 명백히, 곡면$z = f(x,y)$는 항상 유향적이다. 뫼비우스띠는 모든 매끄러운 곡면이 유향적이 아니라는 것을 보여준다.

정의 8.15 *두 개의 매끄러운 단순곡면* (ϕ, E) *와* (ψ, B) *가 유향적이고 모든* $(u,v) \in B$ *에 대해* $\Delta_\tau(u,v) > 0$ *인 추이함수* τ *에 의해 매끄러운 동치이면 두 곡면을* **방향동치(orientation equivalent)***라 한다.*

정리 8.2에 의해 (ϕ, E) 와 (ψ, B) 가 방향동치라면 법선벡터들은 같은 방향이다. 그러므로 (ϕ, E) 에 의해 선택된 양의 면은 (ψ, B) 에 의해 선택된 양의 면과 같다. 방향곡면 적분은 단위접선을 사용하여 방향 선적분을 정의한 것과 같이 단위법선으로 정의할 수 있다. (정의 8.9 과 다음 정의를 비교하여라)

정의 8.16 $S = (\phi, E)$ *를 단위법선* **n** *을 가지는 매끄러운 단순 유향곡면이라 하고* $F : \phi(E) \to \mathbb{R}^3$ *는 연속이라 하자.* S *위에서* F *의* **유향곡면적분***을 다음과 같이 정의한다.*

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma := \iint_{\phi(E)} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma := \int_E (F \circ \phi)(u,v) \cdot N_\phi(u,v)\, d(u,v).$$

$(x,y) \in E$에 대해 $z = f(x,y)$로 주어진 곡면 S 에 대하여, 정의 8.16 은 다음의 형태를 취한다.

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_E F(x,y,f(x,y)) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, d(x,y). \tag{8.7}$$

유향곡면적분은 무엇을 의미하는가? 만약 F 가 $S = (\phi, E)$ 의 자취의 점들에서 비압축 유체의 흐름을 나타낸다면 $F \cdot \mathbf{n}$ 은 F 의 수직 성분을 나타낸다(그림 8.16). 즉 **n** 방향으로 흐르는 유체의 양을 나타내는 것이다. 그러므로 S 위에서 $F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ 의 적분(**n** 방향에서의 S 의 자취를 가로지르는 유체의 흐름의 양)을 S 를 가로지르는 F 의 **흐름(flux)**으로 부른다.

방향 선적분의 경우와 마찬가지로, 유향곡면적분도 어떤 매끄럽지 않은 곡면위에서 정의될 수 있다(연습문제 4를 보라.).

다음 결과는 방향의 변화는 유향곡면적분의 값이 부호가 반대임을 보인다.

참고 1 (ϕ, E) *와* (ψ, B) *가 매끄러운 동치이고, 방향동치가 아니라면,*

$$\int_E F(\phi(u,v)) \cdot N_\phi(u,v)\, d(u,v) = -\int_B F(\psi(s,t)) \cdot N_\psi(s,t)\, d(s,t).$$

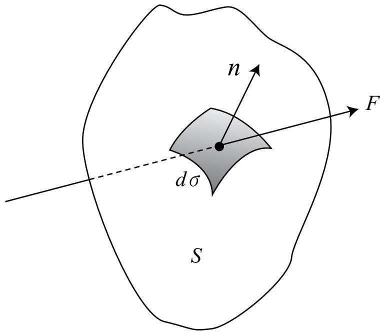

그림 8.16

증명 τ를 $\psi(B)$ 로부터 $\phi(E)$ 로의 추이함수라 하자. Δ_τ 가 연결집합 B 위에서 연속이고 (ϕ, E) 와 (ψ, B) 가 방향동치가 아니므로 B 위에서 $\Delta_\tau < 0$ 이다. 그러므로 정리 8.2 와 7.14(변수 변환공식)에 의해

$$\begin{aligned}
&\int_B F(\psi(s,t)) \cdot N_\psi(s,t)\, d(s,t) \\
&= -\int_B |\Delta_\tau(s,t)|(F \circ \phi \circ \tau)(s,t) \cdot (N_\phi \circ \tau)(s,t)\, d(s,t) \\
&= -\int_{\tau(B)} F(\phi(u,v)) \cdot N_\phi(u,v)\, d(u,v) \\
&= -\int_E F(\phi(u,v)) \cdot N_\phi(u,v)\, d(u,v).
\end{aligned}$$

■

그러므로, 방향이 기하학적으로 표현된 곡면 S 위에서의 방향적분을 계산하고자 할 때, S 위에서 매끄러운 동치 매개변수를 사용할 수 있고, 이미 언급된 방향을 생각하여 적분의 기호를 조정한다.

보기 2 *S 는 $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ 에서 $x+y+z=1$ 을 만족하는 2차원의 영역이다. $\mathbf{n}$은 아래 방향을 가리키는 법선이다. 그리고 $F(x,y,z) = (xy, x-y, z)$ 이다. $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ 의 값을 구하여라.*

풀이 아래 방향보다는 위쪽 방향으로의 평면 $x+y+z=1$ 의 보통 법선벡터 $(1,1,1)$을 생각하자. 참고 1 에 의해

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\int_0^1 \int_0^1 (xy, x-y, 1-x-y) \cdot (1,1,1)\, dx\, dy = -\frac{1}{4}.$$

유향곡면적분을 미분으로 나타내어 보자. 2 차 미분을 정의하기 위해 $S = (\phi, E)$ 를 매끄러운 유향곡면이라 하고 $x = \phi_1(u,v), y = \phi_2(u,v), z = \phi_3(u,v)$ 라 하자. 8.3 절의 참고 1에 의해

$$N_\phi = \Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big).$$

그러므로 함수 $F = (P,Q,R) : \phi(E) \to \mathbb{R}^3$ 의 유향곡면적분은

$$\int_E \Big(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)\, d(u,v)$$

$$= \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

형태를 취한다. 여기서

$$dy\,dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, d(u,v), dz\,dx = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\, d(u,v), dx\,dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, d(u,v).$$

(이것들은 미분 $dy = f'(x)dx$ 와 2 차원적으로 유사하다.) 집합 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 위에서 **2-형식**(혹은 **2 차 미분형식**)을 형식

$$P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

으로 정의한다. 여기서 $P, Q, R : \Omega :\to \mathbb{R}^3$ 이다. 2-형식은 계수 P, Q, R 이 Ω 위에서 연속이면 Ω 위에서 **연속**이라 말한다. 단위 법벡터 $\mathbf{n}$ 을 가진 매끄러운 단순곡면 S 위에서 연속 2형식의 **방향적분**은 다음과 같이 정의된다.

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P,Q,R)\cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

1차 미분형식은 유향 선적분을 계산하기 위해 혹은 함수의 증분을 계산하기 위해 사용된 형식적 기호였다. 마찬가지로 2차 미분형식은 유향곡면적분을 계산하기 위한 것이다. 이것들은 또한 다음 두 절에서 소개할 벡터 미적분의 세 기본정리들을 통합하는데 유용하다.

일반적으로 곡면의 경계는 곡선이고 뫼비우스의 띠의 경계는 단순 닫힌곡선이므로, 곡면이 유향적이지 않을지라도 그 경계는 유향적일 수 있다.

S 를 유향곡면이라 하고 ∂S 를 조각적으로 매끄러운 곡선이라 가정하자. S의 방향은 다음과 같이 ∂S 위의 방향을 이끈다. ∂S에 가까이 S의 양의 면위에 당신이 서 있다고 상상해 보아라. ∂S 위의 양의 흐름 방향은 오른쪽에서 왼쪽으로의 방향이다. 즉, 당신이 양의 흐름 방향으로 S의 양의 면위에서 경계를 따라 걷는다면 곡면은 당

신의 **왼쪽**에 놓인다. ∂S 의 이 방향을 **양의 방향**, **오른손 방향** 혹은 **S의 방향에 의해 유도된 ∂S의 방향**이라고 한다. S 가 xy-평면 $\mathbb{R}^2$ 의 부분집합일 때, S의 위 쪽을 가리키는 법선에 의해 유도된 방향, 다시 말해, 상반공간 $z \geq 0$ 방향을 가리키는 법선에 의해 유도된 방향을 ∂S 가 가진다면 ∂S 를 **양의 방향을 가진다**고 말한다. 그러므로 S 가 경계가 연결된 조각적으로 매끄러운 닫힌곡선인 $\mathbb{R}^2$ 의 유계 부분집합이라면 S 위의 보통 방향은 양의 z-축의 위쪽에서 볼 때 ∂S 위에서 시계반대방향이다. 그러나, $E = \{(x,y) : a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$ 의 경우 양의 방향은 $\{(x,y) : x^2 + y^2 = b^2\}$ 위에서는 시계반대방향이고 $\{(x,y) : x^2 + y^2 = a^2\}$ 위에서는 시계방향이다.

보기 3 *S 는 바깥으로 향하는 법선을 가진 절단된 포물면 $z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 4$ 라 하자. 양의 방향을 가진 ∂S 를 매개변수화하여라.*

풀이 S 의 경계는 평면 $z = 4$ 에 놓인 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이다. 양의 방향은 z-축의 위에서 볼 때 시계방향이다. 그러므로 ∂S 의 매개변수 표현은 $t \in [0, 2\pi]$ 일 때 $\phi(t) = (2\sin t, 2\cos t, 4)$ 이다.

$S = \cup S_j = \cup(\phi_j, E_j)$ 가 연결되지 않은 조각적으로 매끄러운 곡면일 때 각 S_j 가 유향적이라면 S 를 **유향적**이라고 말한다. 이 정의는 연결된 곡면에 대하여는 수정되어야 한다.

뫼비우스 띠는 두 유향곡면의 합집합, $(\phi, E_1), (\phi, E_2), \quad k = 1, 2$ 이다. 여기서 ϕ 는 보기 1 에 주어진 함수이고 $E_k = [\pi(k-2), \pi(k-1)] \times [-1, 1]$, $k = 1, 2$ 이다.

조각적으로 연결된 곡면 $S = \cup S_j = \cup(\phi_j, E_j)$ 가 두 개의 다른 면을 갖는다면 **유향적**이라고 말한다. 이 경우 S 위의 방향은 모든 단위 법벡터가 바깥으로 향하게 일치된 방법으로 양의 변을 동일화하여 각 조각 S_j 위에 단위 법벡터 $\mathbf{n}_j$ 를 생성하기 위한 법벡터 $\pm N_\phi$ 를 사용하여 줄 수 있다.

유향곡면적분은 자연스러운 방법으로 유향적인 조각적으로 매끄러운 곡면에 대해 정의할 수 있다. 실제로, $S = \cup_{j=1}^N S_j$ 가 유향적이라면 S 의 자취위에서 연속인 벡터값 함수 F 의 **유향곡면적분**은 다음과 같이 정의된다.

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \sum_{j=1}^N \iint_{S_j} F \cdot \mathbf{n}_j\, d\sigma.$$

보기 4

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

을 계산하여라. 여기서 S 는 원기둥 $x^2+y^2=1$ 과 평면 $z=0$, $z=2$ 에 의해 둘러싸인 입체의 위상경계이다. $\mathbf{n}$ 은 바깥 방향을 가리키는 법선벡터이고 $F(x,y,z)=(xy,yz,zx)$ 이다.

풀이 이 곡면은 수직면 S_1, 바닥면 S_2, 위면 S_3 의 매끄러운 세 조각을 갖는다(그림 8.17). $E=[0,2\pi]\times[0,2]$ 에서 S_1은 $\phi(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ 로 매개변수화 한다. 그러므로, $N_\phi=(\cos u,\sin u,0)$ 이고

$$\iint_{S_1} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_0^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 u\sin u+v\sin^2 u+v^2\cos u)\,du\,dv=2\pi$$

이다. S_2 의 외향 단위 법선이 $\mathbf{n}=(0,0,-1)$ 이므로 8.3 절의 연습문제 4(a)를 보면

$$\iint_{S_2} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=-\int_{B_1(0,0)} x\,d(x,y)=-\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=0.$$

비슷하게, S_3 위의 적분 또한 0 이다. 그러므로

$$\iint_S F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=2\pi+0+0=2\pi.$$

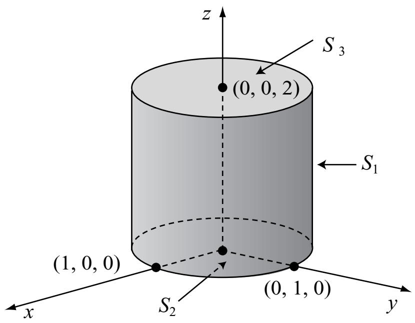

그림 8.17

보기 5 *$\iint_S F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ 를 구하여라. 여기서 $F(x,y,z)=(x+z,xy,z)$ 이고 S 는 포물면 $z=x^2+y^2$ 과 평면 $z=1$ 에 의해 둘러싸인 입체의 위상경계이고 $\mathbf{n}$ 은 외향법선이다.*

풀이 곡면 S 는 $z=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$ 에 의해 주어진 포물면 S_1 과 $x^2+y^2\le 1$, $z=1$ 에 의한 원판 S_2 를 가진다. S_1 의 매개변수 표현은 $\phi(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$,

$(u,v) \in B_1(0,0)$ 이다. $N_\phi = (-2u, -2v, 1)$ 은 내부로 향하기 때문에 틀린 것이다. 그러므로 참고 1 과 극좌표에 의해

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= -\int_{B_1(0,0)} (-2u^2 - 2u(u^2+v^2) - 2uv^2 + (u^2+v^2))\, d(u,v) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r^2\cos^2\theta + 2r^3\cos\theta + 2r^2\cos\theta\sin^2\theta - r^2) r\, d\theta\, dr \\ &= 0.\end{aligned}$$

S_2의 외향단위법선은 $\mathbf{n} = (0,0,1)$ 이고 S_2 위에서 $F \cdot \mathbf{n} = z = 1$ 이므로, 8.3절의 연습문제 4(a)에서 보인 것처럼

$$\iint_{S_2} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{B_1(0,0)} d(x,y) = B_1(0,0)\text{의 넓이} = \pi.$$

그러므로

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0 + \pi = \pi.$$

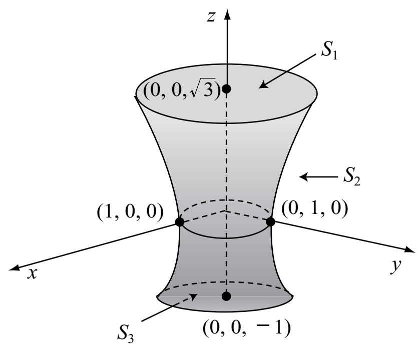

그림 8.18

보기 6 *$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ 를 계산하여라. 여기서 $F(x,y,z) = (x,y,z)$ 이고 S 는 $x^2+y^2-z^2 = 1$ 의 쌍곡면과 평면 $z = -1$, $z = \sqrt{3}$ 에 의해 둘러싸인 입체의 위상경계이고 $\mathbf{n}$ 은 S 의 외향법선이다.*

풀이 곡면 S 는 윗면 S_1, 옆면 S_2, 바닥면 S_3의 세 개의 매끄러운 조각을 갖는다(그림 8.18). S_1 에 대하여 $\mathbf{n} = (0,0,1)$ 을 사용하여

$$\iint_{S_1} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{B_2(0,0)} \sqrt{3}\, d(x,y) = 4\sqrt{3}\pi.$$

비슷하게,

$$\iint_{S_3} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 2\pi.$$

S_2 위 에서 $F \cdot \mathbf{n}$ 을 적분하기 위해서 $z = u$ 라 하고 $x^2 + y^2 = 1 + u^2$ 이라 하자. 그러면 $\phi(u, v) = ((1 + u^2)\cos u, (1 + u^2)\sin v, u)$, $(u, v) \in [-3, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]$ 는 S_2 의 매개변수표현이다. $N_\phi = (-(1 + u^2)\cos v, -(1 + u^2)\sin v, 2u(1 + u^2))$ 는 안 쪽을 향하므로

$$\begin{aligned} F \cdot N_\phi &= ((1 + u^2)\cos v, (1 + u^2)\sin v, u) \cdot \\ &\quad (-(1 + u^2)\cos v, -(1 + u^2)\sin v, 2u(1 + u^2)) \\ &= -(1 + u^2)^2 + 2u^2(1 + u^2) = u^4 - 1 \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= -\int_{-1}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (u^4 - 1)\, dv\, du \\ &= 2\pi \int_{-1}^{\sqrt{3}} (1 - u^4)\, du = \frac{8\pi}{5}(1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

따라서

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 4\sqrt{3} + 2\pi + \frac{8\pi}{5}(1 - \sqrt{3}) = \frac{6\pi}{5}(3 + 2\sqrt{3}).$$

연습문제 (8.4)

1. 다음 각각에 대하여, 유도된 방향과 일치하는 ∂S 의 (조각적으로) 매끄러운 매개변수 표현을 구하고 $\int_{\partial S} F \cdot T\, ds$ 를 계산하여라.

   (a) S 는 외향법선을 가진 $y = 9 - x^2 - z^2$, $y \geq 0$ 인 절단된 포물면이고, $F(x, y, z) = (x^2 y, y^2 x, x + y + z)$ 이다.

   (b) S 는 원점으로부터 멀어지는 법선을 가진 양의 x, y, z 부분에 놓인 $x + 2y + z = 1$ 의 일부이다. 그리고 $F(x, y, z) = (x - y, y - x, xz^2)$ 이다.

(c) S 는 외향법선을 가진 $z = x^2 + y^2$, $1 \le z \le 4$ 의 절단된 포물면이고 $F(x, y, z) = (5y + \cos z, 4x - \sin z, 3x\cos z + 2y\sin z)$.

2. 다음 각각에 대해 $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ 를 계산하여라.

(a) S 는 외향법선을 가진 $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$ 의 절단된 포물면이고 $F(x, y, z) = (x, y, z)$ 이다.

(b) S 는 외향법선 $\mathbf{n}$ 을 가진 $z = \sqrt{4 - y^2}$, $0 \le x \le 1$ 의 절단된 반원기둥이고 $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, yz, z^2)$ 이다.

(c) S 는 8.3절이 보기 4 의 토러스이고 $\mathbf{n}$ 은 외향법선이고 $F(x, y, z) = (y, -x, z)$ 이다.

(d) S 는 원기둥 $x^2 + y^2 = 1$ 의 안쪽에 놓인 $z = x^2$ 의 일부이고 $\mathbf{n}$ 은 상향법선이다. $F(x, y, z) = (y^2 z, \cos(2 + \log(2 - x^2 - y^2)), x^2 z)$

3. 다음 각각에 대해, $\iint_S \omega$ 를 구하여라.

(a) S 는 상향법선을 가진, 단위 사각형 $[0, 1] \times [0, 1]$ 에 놓인 곡면 $z = x^4 + y^2$ 의 일부이다. $\omega = x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy$.

(b) S 는 외향법선을 가진, 상반구 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 이고, $\omega = x\, dydz + y\, dzdx$.

(c) S 는 상향법선을 가진, 원기둥 $x^2 + y^2 = b^2$, $\quad 0 < b < a$ 의 내부에 놓인 구면모자 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 이다. $\omega = xz\, dydz + dzdx + z\, dxdy$.

(d) S 는 z-축으로부터 멀어지는 법선을 가진, 원뿔대 $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 2$ 이다. $\omega = x\, dydz + y\, dzdx + z^2\, dxdy$.

4. (ψ, B) 와 (ϕ, E) 가 단순 $\mathcal{C}^p$곡면, Z 는 넓이가 0 인 B 의 닫힌 부분집합, (ψ, B) 는 Z 밖에서는 매끄럽고 $\tau : B \to \mathbb{R}^2$ 을 B에서 E 위로의 $\mathcal{C}^1$ 함수라 가정하자. 만일 τ 가 $B^o \setminus Z$ 위에서 1-1, $\Delta_\tau > 0$ 이고 $\psi = \phi \circ \tau$ 이면

$$\int_E F(\phi(u, v)) \cdot N_\phi(u, v)\, d(u, v) = \int_B F(\psi(s, t)) \cdot N_\psi(s, t)\, d(s, t)$$

임을 보여라. 여기에서 $F : \phi(E) \to \mathbb{R}^3$ 인 연속함수이다.

5. M_1 과 M_2 를 모두 매끄러운 곡선 이거나 곡면이라 가정하자. 만일 M_1과 M_2가 매끄러운 동치이거나 방향동치라면 M_1이 단순일 필요충분조건은 M_2가 단순임을 증명하여라.

6. E 를 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 에 의해 둘러싸인 사면체라 하자. E 의 위상경계 $T = \partial E$ 가 외향법선을 가질 때, 모든 $\mathcal{C}^1$ 함수 $P, Q, R : E \to \mathbb{R}$ 에 대해

$$\iint_{\partial E} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_E (P_x + Q_y + R_z)\,dV$$

임을 증명하여라.

7. T 를 외향법선을 가진, 연습문제 6 에서의 사면체의 위상경계라 하자. 그리고 S 를 T의 경사면을 제외한 곡면이라 하자. 즉 S 는 평면 $x = 0, y = 0, z = 0$ 에서 각각 하나씩 세 개의 삼각면을 갖는다. 만일 ∂S 가 양의 방향으로 주어진다면 다음을 증명하여라. 모든 $\mathcal{C}^1$ 함수 $P, Q, R : S \to \mathbb{R}$ 에 대해

$$\begin{aligned}&\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\\ &\quad = \iint_S (R_y - Q_z)\,dy\,dz + (P_z - R_x)\,dz\,dx + (Q_x - P_y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

8.5 그린과 가우스의 정리

f 가 $\mathcal{C}^1$ 함수일 때

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

는 미적분학의 기본정리이다. 따라서 $[a, b]$ 위에서 도함수 f' 의 적분은 $[a, b]$위의 위상경계 $\{a, b\}$ 에서 취하는 f 의 값에 의해 완전히 결정된다.

다음 절에서 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 가 $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 으로 대체될 수 있는 유사한 정리들을 얻을 수 있다. Ω는 곡면이거나 m-차원 영역이고, $m = 2$ 또는 $m = 3$ 이다. 즉, Ω 위에서 F 의 미분에 대한 적분은 Ω 의 경계위에서 취하는 F의 값에 의해 완전히 결정된다는 것을 보일 수 있다.

첫 번째 기본정리는 평면에서 2차원의 영역에 관한 것이다.

정리 8.3 (그린정리) *E 는 위상적 경계 ∂E 가 양의 방향을 가지는 조각적으로 매끄러운 곡선인 2차원 영역이라 하자. 만일 $P, Q : E \to \mathbb{R}$ 가 $\mathcal{C}^1$ 이고 $F = (P, Q)$ 이면*

$$\int_{\partial E} F \cdot T \, ds = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

증명 [특수한 영역에 대한 증명] 간단히 하기 위해 E 가 I-형과 II-형 라고 가정하자. 왼쪽의 적분을 써 보면

$$\int_{\partial E} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial E} P\, dx + \int_{\partial E} Q\, dy = I_1 + I_2.$$

먼저 I_1 을 계산하자. E 가 I-형 이므로

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b, \ f(x) \le y \le g(x)\}$$

인 연속함수 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 을 선택한다. 따라서 ∂E 는 위 $y = g(x)$, 아래 $y = f(x)$, 그리고 하나 또는 둘의 수직변을 갖는다(그림 8.19). 양의 방향이 시계반대방향이므로 위의 전형적 매개변수 표현은 x 가 b 에서 a 까지 움직일 때 $y = g(x)$ 이고 아래는 x 가 a 에서 b 까지 움직일 때 $y = f(x)$ 이다. 어떠한 수직곡선 위에서도 $dx = 0$ 이므로 I_1 에 수직인 변들의 값은 0 이다. 따라서 정의 8.9 과 일차원의 미적분학의 기본정리로부터

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\partial E} P\, dx &= \int_a^b P(x, f(x))\, dx + \int_b^a P(x, g(x))\, dx \\ &= -\int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))\, dx \\ &= -\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy\, dx = -\iint_E \frac{\partial P}{\partial y}\, dA. \end{aligned}$$

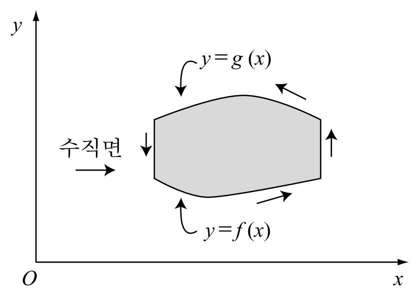

그림 8.19

E 가 II-형이므로 비슷한 논법에 따라

$$I_2 = \int_{\partial E} Q\,dy = \iint_E \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA.$$

I_1 과 I_2 를 더하면 증명이 완성된다. ■

E 가 I-형 과 II-형 이라는 가정은 증명을 간단하게 만들기 위한 것이었다. 유한개의 I-형과 II-형의 영역으로 나누어질 수 있는 임의의 2차원 영역에 대하여도 그린정리가 만족된다는 것을 확인해 보는 것은 쉬운 일이다. 예를 들어, 영역 E 가 그림 8.20 에 그려진 영역이라고 생각해 보자. 비록 E 가 II-형이 아닐지라도 E 는 모두 I-형 과 II 인 영역E_1 과 E_2 로 나누어질 수 있다. 각 영역에 대해 정리 8.3을 적용하면

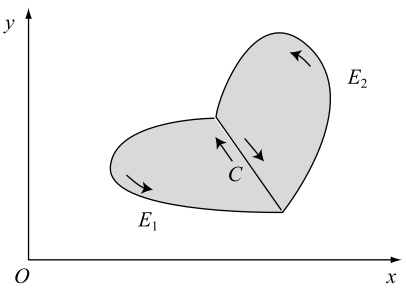

그림 8.20

$$\begin{aligned}\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \iint_{E_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{E_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \int_{\partial E_1} F \cdot T\,ds + \int_{\partial E_2} F \cdot T\,ds \\ &= \int_{\partial E} F \cdot T\,ds + \int_{C \cap \partial E_1} F \cdot T\,ds + \int_{C \cap \partial E_2} F \cdot T\,ds.\end{aligned}$$

여기서, C 는 E_1 과 E_2가 만나는 경계이다. ∂E_1 과 ∂E_2 가 시계반대방향이므로 $C \cap \partial E_1$ 의 방향은 $C \cap \partial E_2$ 의 방향과 반대이다. 방향의 변화는 적분의 부호는 변하므로 C 를 따른 적분은 없어진다. 결과의 끝은 약속된 것처럼 ∂E 위의 $F \cdot T\,ds$ 의 적분이다.

그린정리는 종종 지루한 매개변수 표현을 피하기 위해 사용된다.

보기 1 $E = [0,1] \times [0,1]$, ∂E 는 *시계반대방향*, $F(x,y) = (xy, x^2 + y^2)$ *일 때 적분* $\int_{\partial E} F \cdot T\,ds$ *를 구하여라.*

풀이 ∂E는 네 변을 가지므로 직접적인 계산은 네 개의 분리된 매개변수 표현이 요구된다. 그러나, 그린정리에 의하여

$$\int_{\partial E} F \cdot T\, ds = \int_0^1 \int_0^1 (2x - x)\, dy\, dx = \frac{1}{2}.$$

그린정리는 어려운 적분을 피하기 위해 사용된다.

보기 2 *$E = B_1(0,0)$, ∂E 는 시계방향, $F = (xy^2, \arctan(\log(y^2+3)) - x^3)$ 일 때 적분 $\int_{\partial E} F \cdot T\, ds$ 를 계산하여라.*

풀이 F 의 두 번째 구성요소는 적분하기 어려워 보인다. 그러나, 그린정리에 의하면

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} F \cdot T\, ds &= -\iint_{B_1(0,0)} (-3x^2 - 2xy)\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2 \sin^2\theta + 2r^2 \cos\theta \sin\theta) r\, dr\, d\theta = \frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

(주의 : 음수기호는 ∂E 가 시계방향이기 때문이다.)

그린정리에 의해 $\mathbb{R}^2$ 속에서 2차원의 영역에 대한 미적분학의 기본정리를 얻기 위해 사용된 "미분"은 $Q_x - P_y$이다. 다음은 Ω 가 $\mathbb{R}^3$ 의 곡면 또는 3차원의 영역일 때 사용될 "미분"들이다.

정의 8.17 *E 는 $\mathbb{R}^3$ 내의 부분집합, $F = (P, Q, R) : E \to \mathbb{R}^3$ 는 E 위에서 $\mathcal{C}^1$ 이라 하자. F 의 회전을*

$$\text{curl } F = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big);$$

F 의 발산을

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

으로 정의한다.

만일 $F = (P, Q, 0)$ 이면 curl $F = (0, 0, Q_x - P_y)$ 은 그린정리에 사용된 미분이다.

위 미분들은 기호(Nabla 라고 부른다)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

를 사용하면 좀 더 쉽게 기억할 수 있는 형태

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

와

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R)$$

로 쓸 수 있다.

만일 E 가 위상경계가 조각적으로 매끄러운 유향곡면인 3차원의 영역이면 ∂E 위의 **양의 방향**은 E^o 로부터 멀어지는 단위 법선에 의해 결정된다. E 가 볼록하다면 이것은 $\mathbf{n}$ 이 바깥으로 향함을 뜻한다. 그러나 E 가 내부 거품을 가질 때에는 이 경우가 아니다.

보기 3 *어떤* $a > 0$ *에 대하여* $E = \{\mathbf{x} \,:\, a \le \|\mathbf{x}\| \le b\}$ *이면* $\mathbf{n}$ *은* $\{x : \|\mathbf{x}\| = b\}$ *위에서는 원점에서 멀어지는 쪽을,* $\{x : \|\mathbf{x}\| = a\}$ *에서는 원점을 향하는 방향을 가리킨다.*

다음 기본정리는 Ω 가 3차원 영역일 때이다. 이 결과는 **발산정리(divergence theorem)**라고도 불린다.

정리 8.4 (가우스 정리) E *는 위상경계* ∂E *가 양의 방향인 조각적으로 매끄러운 곡면인 3차원 영역이라 하자.* $F : E \to \mathbb{R}^3$ *가* E *위에서* $\mathcal{C}^1$ *이라면*

$$\iint_{\partial E} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV.$$

증명 [특수한 영역에 대한 증명] E 가 I, II, III-형 영역이라고 가정하자. $F = (P, Q, R)$ 이라 하고 미분형식에 따라 곡면적분을 쓰면

$$\begin{aligned} \iint_{\partial E} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{\partial E} P\, dy\, dz + \iint_{\partial E} Q\, dz\, dx + \iint_{\partial E} R\, dx\, dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

I_3 먼저 계산해 보자. E 가 I-형 이므로, 이차원 영역 $B \subset \mathbb{R}^2$ 과

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B,\ f(x, y) \le z \le g(x, y)\}$$

인 연속함수 $f, g : B \to \mathbb{R}$ 가 존재한다. 따라서 ∂E 는 위 $z = g(x, y)$, 아래 $z = f(x, y)$ 와 수직면을 갖는다(그림 8.21). 수직면위의 ∂E 의 어떠한 법선도 xy-평면에 평행하다.

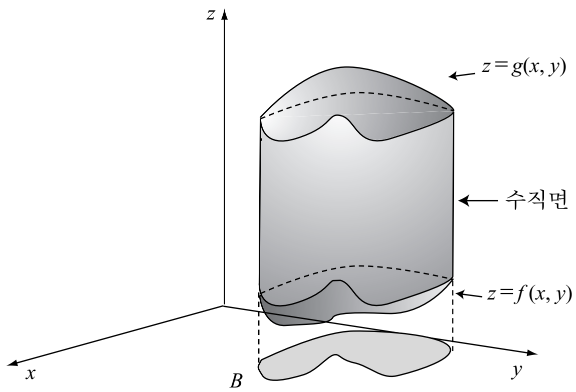

그림 8.21

$dx\,dy$ 는 ∂E 법선의 세 번째 성분이므로 그것은 수직면위에서 0 이 되어야 한다. 그러므로 I_3 는 ∂E 의 위와 아래의 적분에 의해 계산될 수 있다. 가정에 의해 바닥의 단위법선은 아래를 향하고 윗 부분의 단위법선은 위를 향한다. 매개화변수화와 정리 3.13을 사용하면

$$\begin{aligned} I_3 = \iint_{\partial E} R\,dx\,dy &= \int_B (R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y)))\,d(x,y) \\ &= \int_B \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz\,d(x,y) = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV. \end{aligned}$$

비슷한 방법으로, E 는 II-형이므로

$$I_2 = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV,$$

그리고 E 는 III-형이므로

$$I_1 = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV.$$

$I_1 + I_2 + I_3$ 을 더하여 정리를 얻는다. ■

E 가 I, II, III-형이라는 가정은 증명을 간단히 하기 위해 더해진다. 유한 개의 I, II, III-형 영역으로 분할되는 임의의 3차원 영역에서 가우스 정리가 성립하는지를 확인해 보는 것은 쉽다. 예를 들어 $E = E_1 \cup E_2$ 이고 S 가 E_1 과 E_2 사이의 공통 곡면이라면

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} F\,dV &= \iiint_{E_1} \operatorname{div} F\,dV + \iiint_{E_2} \operatorname{div} F\,dV \\ &= \iint_{\partial E} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{S\cap\partial E_1} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint_{S\cap\partial E_2} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \end{aligned}$$

E_1과 E_2가 외향법선을 가지므로 $S\cap\partial E_1$의 방향과 $S\cap\partial E_2$ 의 방향은 다르고 S 위의 적분은 서로 상쇄되어 없어진다.

보기 4 *S 가 입체*

$$E=\{(x,y,z):x^2+y^2\le z\le 1\},$$

의 위상경계이고 $\mathbf{n}$ *은 외향법선이다.* $F(x,y,z)=(2x+\sin z^2,\cos x^5+\log z^7,\cos(x^2)+\tan(y^3)-z^2)$ *일 때 정리 8.4를 이용해* $\iint_S F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ *를 계산하여라.*

풀이 div $F=2-2z$ 이므로, 가우스 정리에 의해

$$\iint_S F\cdot\mathbf{n}d\sigma=\iiint_E(2-2z)dV=2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1(1-z)r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{3}.$$

보기 5 *Q 는 단위 정육면체* $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, $\mathbf{n}$ *은 외향법선,* $F(x,y,z)=(2x-z,x^2y^2,-x+z^2)$ *일 때* $\iint_{\partial Q}F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ *를 구하여라.*

풀이 ∂Q 는 여섯 개의 면을 가지므로 적분의 직접 계산은 여섯 개의 적분을 필요로 한다. 그러나 가우스 정리에 의해

$$\iint_{\partial Q}F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(2+2x^2y-2z)\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{3}.$$

이러한 정의와 결과는 유체 흐름에 대하여 생각할 때 새로운 의미를 제시해 준다. F 가 점 $\mathbf{a}$ 의 근방에서 비압축 유체의 흐름을 나타낼 때 curl $F(\mathbf{a})$ 는 $\mathbf{a}$ 에 관하여 시계 반대방향으로 회전 정도를 측정한다. 그리고 div $F(\mathbf{a})$ 는 $\mathbf{a}$ 로부터 퍼져나가는 유체의 정도를 측정한다(연습문제 7).

보기 6 $F(x,y,z)=(x,y,z)$ *이면 유체는 전혀 소용돌이치지 않고 원점으로부터 곧바로 퍼져나간다. 따라서* curl $F=0$ *이고* div $F=3$ *이다. 한편* $G(x,y,z)=(y,-x,0)$ *라면 유체는 원점 주위에서 원운동처럼 주위를 소용돌이친다. 따라서* curl $G=(0,0,-1)$ *이지만* div $G=0$ *이다.* curl G *의 성분에서 음수 표시에 주의하여라. 이 유체는 원점 주위에서 시계방향을 따라 소용돌이친다.*

유체가 2차원의 영역 $E \subset \mathbb{R}^2$ 위에서 흐를 때, C 위에서 $F \cdot T\, ds$ 의 적분은 T 방향을 따라 C 주위를 순환하는 유체를 나타낸다(8.2절의 예 5와 비교해 보라). 그러므로, 그린정리는 접선방향에서 ∂E 주위의 유체의 순환은 E 내부에서 유체가 얼마나 강하게 소용돌이치는가에 의해 결정된다는 것을 알려 준다. F 가 3차원 영역 $E \subset \mathbb{R}^3$ 에서 비압축 유체의 흐름을 나타내고 $S = \partial E$ 일 때, 적분 $\iint_S F \cdot \mathbf{n}$ 은 곡면 S 를 가로지르는 유체의 흐름량을 나타낸다 (정의 8.14와 비교해 보아라). 그러므로 가우스 정리는 $S = \partial E$ 를 가로지르는 유체의 흐름량은 E 내부에서 유체가 얼마나 강하게 퍼져 나가는지에 의해 결정된다는 것을 보여 준다.

연습문제 (8.5)

1. 다음 각각에 대하여, $\int_C F \cdot T ds$ 를 계산하여라.

   (a) C는 시계반대방향이고, $x = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ 에 의하여 둘러싸인 제1사분면의 2차원 영역의 위상경계이고 $F(s, y) = (\sin(\sqrt{x^3 - x^2}), xy)$.

   (b) C는 시계반대방향이고, 정점 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(2,3)$을 가진 사각형의 경계이고 $F(x,y) = (e^y, \log(x+1))$.

   (c) $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 = \partial B_1(0,0)$ 은 시계반대방향이고, $C_2 = \partial B_2(0,0)$ 는 시계방향 이다. 그리고 $F(x,y) = (f(x^2+y^2), xy^2)$, f 는 $[1,2]$ 위에서 $\mathcal{C}^1$ 함수이다.

2. 다음 각각에 대해 $\int_C \omega$를 구하여라.

   (a) C 는 사각형 $[a,b] \times [c,d]$ 의 위상경계이고 시계반대방향이다. 임의의 연속함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$인 에 대하여 $\omega = (f(x) + y)\, dx + xy\, dy$.

   (b) C 는 $y = x^2$ 과 $y = x$ 에 의해 둘러싸인 2차원 영역의 위상경계이고 시계방향이다. $\omega = yf(x)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy$, 여기서 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 은 연속이고 $\int_0^1 xf(x)\, dx = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$ 를 만족한다.

   (c) C는 그린정리의 결론을 만족하는 2차원의 영역 E의 위상경계이고 양의 방향이다. $\omega = e^x \sin y\, dy - e^x \cos y\, dx$.

3. 다음 각각에 대해 $\iint_S F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$을 계산하여라. 여기서 $\mathbf{n}$은 외향법선이다.

(a) S는 입방체 $[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$의 위상경계이고 $F(x,y,z) = (x+e^z, y+e^z, e^z)$이다.

(b) S는 원판 $x^2+y^2 \le 1$, $z=0,1$을 가진 절단된 원기둥 $x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1$이고 $F(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$이다.

(c) S 는 E 의 위상경계이다. $E\subset\mathbb{R}^3$ 는 $z=2-x^2$, $z=x^2$, $y=0$, $z=y$ 으로 둘러싸여 있다. $F(x,y,z)=(x+f(y,z), y+g(x,z), z+h(x,y))$, $f,g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$는 연속이다.

(d) S 는 타원면 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, $F(x,y,z)=(x|y|, y|z|, z|x|)$ 이다.

4. 다음 각각에 대해, $\mathbf{n}$ 은 외향법선일 때 $\int_S \omega$를 구하여라.

(a) S 는 $y=x^2$, $z=0$, $z=1$, $y=4$ 로 둘러싸인 3차원 영역의 위상경계이고 $\omega = xyz\,dydz + (x^2+y^2+z^2)\,dzdx + (x+y+z)\,dxdy$ 이다.

(b) S 는 원판 $x^2+z^2\le 1, y=0$ 과 $x^2+z^2\le 2, y=1$ 을 가진 절단 쌍곡면 $x^2-y^2+z^2=1,\quad 0\le y\le 1$ 이고 $\omega = xy|z|\,dydz + x^2|z|\,dzdx + (x^3+y^3)\,dxdy$.

(c) S 는 곡면 $x^2+y+z^2=4$ 과 $4x+y+2z=5$ 에 의해 둘러싸인 $E\subset\mathbb{R}^3$의 위상경계이다. $\omega=(x+y^2+z^2)\,dydz+(x^2+y+z^2)\,dzdx+(x^2+y^2+z)\,dxdy$ 이다.

5. (a) E는 위상경계가 시계반대방향으로 매끄러운 유향곡선인 조르단 영역이라면 넓이는

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E} x\,dy - y\,dx$$

임을 증명하여라.

(b) 데카르트의 Folium

$$\phi(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right), \qquad t\in[0,\infty)$$

로 둘러싸인 넓이를 구하여라.

(c) (a)와 유사하게 $\mathbb{R}^3$에서 조르단영역 E의 체적을 구하여라.

(d) 지름 $a>b$인 원환면의 체적을 계산하여라(8.3절의 예제 4를 보라).

6. (a) P, Q 의 연속성이 E 내의 한 점에서 제외된다면 그린정리를 만족하지 않음을 보여라 (힌트 : $P = y/(x^2 + y^2)$, $Q = -x/(x^2 + y^2)$, $E = B_1(0,0)$ 를 생각하여라).

   (b) F 의 연속성이 E 내의 한 점에서 제외된다면 가우스 정리가 성립하지 않음을 보여라.

7. **이 연습문제는 8.6절에서 사용된다.** V를 $\mathbb{R}^3$의 열린집합이고 $F : V \to \mathbb{R}^3$는 $\mathcal{C}^1$이라고 가정할 때 각 $\mathbf{x}_0 \in V$ 에 대하여 $\mathbf{n}$이 $B_r(\mathbf{x}_0)$ 의 외향법선일 때 다음을 증명하여라.

$$\text{div } F(\mathbf{x}_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\text{Vol}(B_r(\mathbf{x}_0))} \iint_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

8. $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 와 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 이 미분가능하다고 하자. 다음 회전과 발산에 대한 미분의 합과 곱에 대한 공식을 증명하여라.

   (a) $\nabla \times (F + G) = (\nabla \times F) + (\nabla \times G)$

   (b) $\nabla \times (fF) = f(\nabla \times F) + (\nabla f \times F)$

   (c) $\nabla \cdot (fF) = \nabla f \cdot F + f \cdot (\nabla \cdot F)$

   (d) $\nabla \cdot (F + G) = \nabla \cdot F + \nabla \cdot G$

   (e) $\nabla \cdot (F \times G) = (\nabla \times F) \cdot G - (\nabla \times G) \cdot F$

9. **이 연습문제는 8.6절에서 사용된다.** $E \subset \mathbb{R}^2$ 이라 하자. $\mathcal{C}^1$함수 $f : E \to \mathbb{R}$ 의 그래디언트는

$$\text{grad } f := \nabla f := (f_x, f_y)$$

로 정의된다는 것을 되새겨 보아라.

   (a) E 와 F 가 그린 정리의 결론을 만족하고 $f : E \to \mathbb{R}$ 이 $\mathcal{C}^2$ 함수라 가정하자. E 위에서 $F = \text{grad } f$ 라면 다음을 증명하여라.

$$\int_{\partial E} F \cdot T \, ds = 0.$$

   (b) f 와 F 가 $\mathbf{x}_0$ 에서 $\mathcal{C}^2$ 라면 curl grad $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ 이고 div curl$F(\mathbf{x}_0) = 0$ 임을 증명하여라.

(c) E 와 F 가 가우스 정리의 결론을 만족하고 $f : E \to \mathbb{R}$ 이 $\mathcal{C}^2$ 함수라고 가정하자. E 위에서 $F = \operatorname{grad} f$ 이면 다음을 증명하여라.

$$\iint_{\partial E} fF \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_E F \cdot F\, dV.$$

10. E 가 $\mathbb{R}^m$ 의 부분집합이라 하자. 각 $u : E \to \mathbb{R}$ 이 E 위에서 2계 편미분가능하다고 하면 $\Delta u := \displaystyle\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ 로 정의된다.

(a) u 가 E 위에서 $\mathcal{C}^2$ 라면 E 위에서 $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$임을 보여라.

(b) **(그린의 제 1 항등식)** $E \subset \mathbb{R}^3$ 가 모든 $\mathcal{C}^1$ 함수 F에 대하여 가우스 정리의 결론을 만족한다면 모든 $\mathcal{C}^2$ 함수 $u, v : E \to \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\iiint_E (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dV = \iint_{\partial E} u\nabla v \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

이 성립함을 보여라.

(c) **(그린의 제 2 항등식)** $E \subset \mathbb{R}^3$가 모든 $\mathcal{C}^1$함수 F 에 대하여 가우스 정리의 결론을 만족한다면 모든 $\mathcal{C}^2$ 함수 $u, v : E \to \mathbb{R}$에 대하여

$$\iiint_E (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \iint_E (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

이 성립함을 보여라.

(d) 함수 $u : E \to \mathbb{R}$ 가 E 위에서 u 는 $\mathcal{C}^2$ 이고 모든 $\mathbf{x}_0 \in E$ 에 대하여 $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$ 을 만족한다면 조화적이라고 말한다. E는 모든 $\mathcal{C}^1$ 함수 F에 대하여 가우스 정리의 결론을 만족하는 $\mathbb{R}^3$ 의 열린영역이라고 가정하자. u 가 E 위에서 조화적이고 $\overline{E}$ 위에서 연속이며, ∂E 위에서 $u = 0$ 이라면 $\overline{E}$ 위에서 $u = 0$ 임을 증명하여라.

(e) V 는 $\mathbb{R}^2$ 에서 열린집합이고 u 는 V 위에서 $\mathcal{C}^2$ 이며 u는 $\overline{V}$ 위에서 연속이라고 가정하자. u 가 V 위에서 조화적일 필요충분조건은 모든 $\mathcal{C}^1$ 함수 $F = (P, Q)$ 에 대하여 그린 정리의 결론을 만족하는 모든 2차원 영역 $E \subset V$ 에 대해

$$\int_{\partial E} (u_x\, dy - u_y\, dx) = 0$$

일 때 이다.

8.6 스토크스 정리

마지막 기본정리는 경계가 곡선인 $\mathbb{R}^3$ 의 곡면에 적용된다.

정리 8.5 (스토크스 정리) *S를 단위법선 $\mathbf{n}$을 가진 $\mathbb{R}^3$ 에서의 유향 $\mathcal{C}^2$ 곡면이라 하자. 만일 경계 ∂S 가 양의 방향인 조각적으로 매끄러운 곡선이고 $F : S \to \mathbb{R}^3$ 가 $\mathcal{C}^1$ 이면*

$$\int_{\partial S} F \cdot T\, ds = \iint_S \text{curl } F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

이다.

증명 [**특수한 곡면에 대한 증명**] 간편성을 위해 S 는 모든 $\mathcal{C}^1$함수 F에 대해 그린정리의 결론을 만족하는 2차원의 영역 E 위에 놓인 $\mathcal{C}^2$곡면이라 하자. $F = (P, Q, R)$이라 하고 미분기호에 선적분을 쓰면

$$\int_{\partial S} F \cdot T\, ds = \int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

S 는 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$ 에 의해 결정된다고 가정해도 일반성을 잃지 않는다. 여기서 $f : E \to \mathbb{R}$ 은 $\mathcal{C}^2$ 함수이고 S 는 상향법선을 가진 유향곡면이다. 그러므로 $\mathbf{n} = N/\|N\|$, 여기서 $N = (-f_x, -f_y, 1)$.

$(\psi(t), \sigma(t))$, $t \in [a, b]$ 를 시계반대방향인 ∂E 의 조각적 매끄러운 매개변수 표현이라 하자. 그러면

$$\phi(t) = (\psi(t), \sigma(t), f(\psi(t), \sigma(t))), \qquad t \in [a, b],$$

는 양의 방향인 ∂S 의 조각적으로 매끄러운 매개변수 표현이다(그림 8.22). 만일 $x = \psi(t)$, $y = \sigma(t)$ 와

$z = f(\psi(t), \sigma(t))$ 이면, $dx = \psi'(t)dt$, $dy = \sigma'(t)dt$, 그리고

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

따라서, 정의에 의해

$$\int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_{\partial E} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy. \tag{8.8}$$

마지막 적분에 그린정리를 작용할 수 있다. 연쇄법칙과 곱의 법칙에 의해

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

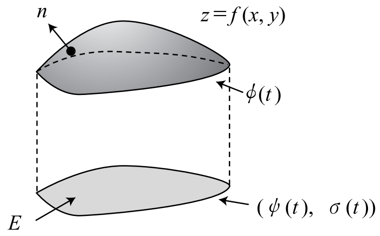

그림 8.22

이고

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

$z = f(x, y)$는 $\mathcal{C}^2$이므로 위의 혼합 2 계 편미분은 같다. 그러므로

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \text{curl}\, F \cdot N.
\end{aligned}$$

그러므로 (8.8), 그린정리, (8.7) 로 부터

$$\int_{\partial S} F \cdot T\, ds = \int_E \text{curl}\, F \cdot N\, d(x, y) = \iint_S \text{curl}\, F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

■

어떤 곡면이 유한개의 위의 증명과 같은 곡면으로 분할된다면 스토크스 정리가 만족된다는 것을 알 수 있다.

스토크스 정리는 복잡한 선적분을 간단한 곡면적분으로 대체하는데 사용된다.

보기 1 *C는 y-축에서 보았을 때 시계반대방향인 원 $x^2+y^2 = 1, y = 0$ 이다. $F(x, y, z) = (x^2 z + \sqrt{x^3 + x^2 + 2}, xy, xy + \sqrt{z^3 + z^2 + 2})$ 일 때 $\int_C F \cdot T\, ds$ 를 계산하여라.*

풀이 curl $F = (x, x^2 - y, y)$ 이므로 스토크스 정리를 사용하는 것이 직접 $F \cdot Tds$ 을 적분하는 것보다 쉬워 보인다. S를 원판 $x^2 + z^2 \le 1$, $y = 0$ 이라 하자. $\partial S = C$ 가 된다. C는 시계반대방향이므로 S의 법선은 y-축의 양의 방향을 가리켜야 한다. 즉, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$. 그러므로 S 위에서 curl $F \cdot \mathbf{n} = x^2 - y = x^2$ 이고 스토크스 정리를 응용하면

$$\int_C F \cdot T\, ds = \iint_S x^2\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \cos^2\theta\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

보기 1 에서 경계 C 인 임의의 곡면 S를 선택할 수 있었다. 그러므로 스토크스 정리는 복잡한 곡면적분을 더 간단한 곡면적분으로 대체하는 데 사용될 수 있다.

보기 2 *S는 반 타원면 $9x^2+4y^2+36z^2=36,\ z\geq 0$, $\mathbf{n}$은 상향법선이다.*

$$F(x,y,z)=(\cos x\sin z+xy, x^3, e^{x^2+z^2}-e^{y^2+z^2}+\tan(xy)).$$

일 때 $\iint_S \operatorname{curl} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ 를 구하여라.

풀이 $C=\partial S$라 하자. S 위에서 $\operatorname{curl} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ 의 적분과 C 위에서 $F\cdot T\,ds$ 의 적분은 둘 다 복잡하다. 그러나 스토크스 정리에 의해, C 위에서 $F\cdot T\,ds$ 의 적분은 $\partial E=C$ 인 임의의 유향 C^2 곡면 E 위에서 $\operatorname{curl} F\cdot\mathbf{n}d\sigma$ 의 적분과 같다. E 를 2차원 영역 $9x^2+4y^2\leq 36$ 이라 하자. E 위에서 $\mathbf{n}=(0,0,1)$ 이다. 그러므로, 단지 curl F 의 세 번째 성분

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3)-\frac{\partial}{\partial y}(\cos x\sin z+xy)=3x^2-x$$

만 필요하다. 따라서

$$\iint_S \operatorname{curl} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_E(3x^2-x)\,d(x,y).$$

$x=2r\cos\theta$ 이고 $y=3r\sin\theta$ 라 하자. 변수변환에 의해

$$\int_E(3x^2-x)\,d(x,y)=\int_0^{2\pi}\int_0^1(12r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta)6r\,dr\,d\theta=18\pi.$$

스토크스 정리는 복잡한 곡면적분을 간단한 선적분으로 바꾸는데 사용될 수도 있다.

보기 3 *S를 절단 포물면 $z=x^2+y^2, 0\leq z\leq 1$ 과 절단 원기둥 $x^2+y^2=1,\ 1\leq z\leq 3$ 의 합집합이라 하자. $\mathbf{n}$이 외향법선이고 $F(x,y,z)=(x+z^2,0,-z-3)$일 때*

$$\iint_S F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

를 계산하여라.

풀이 S의 경계는 $x^2+y^2=1,\ z=3$이다. 스토크스 정리를 사용하기 위해

$$\operatorname{curl} G=F$$

인, 즉

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x + z^2, \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \tag{8.10}$$

와

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -z - 3 \tag{8.11}$$

인 함수 $G = (P, Q, R) : S \to \mathbb{R}^3$ 을 찾아야 한다. (8.9)를 가지고 시작해 보자. 정리하면

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = z^2. \tag{8.12}$$

(8.12)의 왼쪽 식으로부터 어떤 함수 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$에 대하여 $Q = -xz + g(x, y)$ 을 얻는다. 비슷하게 (8.12)의 오른쪽 식으로부터 어떤 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 에 대해 $R = z^2 y + h(x, z)$이다. 따라서 $Q_x = -z + g_x$ 은 $g = 0$ 과 $P_y = 3$, 즉, 어떤 $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $P = 3y + \sigma(x, z)$ 라 두면 (8.11) 을 풀게된다. 그러므로, $\sigma = h = 0$ 이면 $P_z - R_x = \sigma_z - h_x$ 는 (8.10)을 만족할 것이다. 따라서 $P = 3y$, $Q = -xz$, $R = yz^2$, 즉 $G = (3y, -xz, yz^2)$ 이다.

∂S 를 $\phi(t) = (\sin t, \cos t, 3)$, $t \in [0, 2\pi]$ 으로 매개변수화하고

$$(G \circ \phi) \cdot \phi' = (3\cos t, -3\sin t, 9\cos t) \cdot (\cos t, -\sin t, 0) = 3\cos^2 t + 3\sin^2 t = 3.$$

결론적으로, 스토크스 정리를 사용하면

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S \operatorname{curl} G \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{\partial S} G \cdot T\, ds = \int_0^{2\pi} 3\, dt = 6\pi.$$

보기 3 의 풀이는 curl $G = F$ 를 만족하는 함수 G를 찾는 것에 관한 문제였다. 이러한 함수는 유일하지 않다. 실제로 (8.12) 대신에

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -z^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = x$$

로 시작할 수도 있었다. 이것은 다른 해

$$\tilde{G}(x, y, z) = (zy, -(3x + z^3/3), xy)$$

를 얻는다. 실제로 스토크스 정리에 의해 $G \cdot T$ 의 유향선적분의 값은 curl $G = F$ 를 만족하는 모든 G 에 대해 동일하다.

이 방법은 연립 편미분방정식 curl $G = F$ 가 해 G를 가질 때만 사용할 수 있다. 이때 먼저 그러한 해가 존재하는지를 식별할 수 있어야만 한다. G의 존재의 필요조건을 찾기 위해 어떤 집합 E 위에서 G 는 curl $G = F$ 를 만족하는 $\mathcal{C}^2$ 함수라고 가정하자. 그러면 $\mathcal{C}^2$ 벡터함수 F 에 대하여

$$\text{div curl} F = 0 \tag{8.13}$$

이므로(8.5 절 연습문제 9(b)), E 위에서 div $F = 0$ 이다.

정리 8.6 *주어진 벡터함수 F 에 대하여 벡터함수 G 가 존재하여*

$$\text{curl G} = F \tag{8.14}$$

이 성립하면 div $F = 0$ *이다.*

그러나 이 정리의 역은 성립하지 않는다.

보기 4 $\Omega = B_1(0,0,0) \setminus \{(0,0,0)\}$ *이고* $w = w(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *일 때*

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{w^{3/2}}, \frac{y}{w^{3/2}}, \frac{z}{w^{3/2}}\right)$$

라 하자. 그러면 Ω *위에서* div $F = 0$ *이지만* curl $G = F$ *를 만족하는* G *는 없다.*

증명 정의에 의해

$$\text{div } F = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{w^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{w^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{w^{5/2}} = 0.$$

S를 외향법선을 가진 유향 단위구면 $\partial B_1(0,0,0)$ 라 하자. 그리고 curl $G = F$를 만족하는 G 가 존재한다고 가정하자. 한편 S 위에서 $F = (x,y,z) = \mathbf{n}$ 이면 $F \cdot \mathbf{n} = x^2 = y^2 + z^2 = 1$ 이 성립하므로

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S 1\, dA = \sigma(S) = 4\pi. \tag{8.15}$$

또 다른 한편으로 S 를 상반구 S_1 과 하반구 S_2 로 나누면 스토크스 정리에 의해

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{S_1} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma && (8.16)\\ &= \int_{\partial S_1} G \cdot T_1\, ds + \int_{\partial S_2} G \cdot T_2\, ds = 0. && (8.17)\end{aligned}$$

마지막 절차는 $\partial S_1 = \partial S_2$ 이고 $T_1 = -T_2$로부터 나온다. (8.15) 와 (8.16) 은 서로 일치하지 않으므로 curl $G = T$ 를 만족하는 G는 없다. ■

보기 4 에서 (8.14) 을 만족하는 함수 G 가 존재하지 않는 이유는 함수의 정의역에 크게 의존함을 알 수 있다. 만일 E 가 좋은 영역이면 정리 8.6 의 역이 성립함을 보여 준다.

정리 8.7 *Ω 를 중심이 $(0,0,0)$인 공 혹은 $(0,0,0)$을 포함하는 입방체라 하고 $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ 를 Ω 위에서 $\mathcal{C}^1$ 이라 하자. 그러면 다음은 동치이다.*

(i) *Ω 위에서* curl $G=F$ *인 $\mathcal{C}^2$ 함수 $G:\Omega\to\mathbb{R}^3$ 가 존재한다.*

(ii) *$F, E, S=\partial E$ 는 그린 정리의 결론을 만족하고 $E\subset\Omega$ 이면*

$$\iint_S F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0 \tag{8.18}$$

(iii) *Ω 위에서 항등식* div $F=0$ *이 성립한다.*

증명 (i)이 성립하면 G의 1계 편미분이 교환되므로, div $F=$ div(curl G) $=0$ 이다. 그러므로 가우스 정리에 의해 (8.13)이 성립된다.

(ii)가 성립한다면 가우스 정리와 8.5절이 연습문제 7에 의해 각각의 $\mathbf{x}_0\in\Omega^o$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\text{div}\,F(\mathbf{x}_0) &= \lim_{r\to0}\frac{1}{\text{Vol}(B_r(\mathbf{x}_0))}\iiint_{B_r(\mathbf{x}_0)}\text{div}\,F\,dV\\ &= \lim_{r\to0}\frac{1}{\text{Vol}(B_r(\mathbf{x}_0))}\iint_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)}F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0\end{aligned}$$

div F 는 Ω 위에서 연속이므로, Ω 위의 모든곳에서 div $F=0$ 이다.

마지막으로 (iii)이 성립한다고 가정하자. $F=(p,q,r)$ 이라 하고 간단하게 하게 하기위해 $G=(0,Q,R)$ 로 가정하자. curl $F=G$ 라면

$$R_y-Q_x=p,\quad -R_x=q,\quad Q_x=r. \tag{8.19}$$

마지막 두 항등식을 적분하면, 어떤 $g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 에 대하여

$$R=-\int_0^x q(u,y,z)\,du+g(y,z),\quad Q=\int_0^x r(u,y,z)\,du+h(y,z).$$

(주의 : 가정에 의하여 $(0,y,z)$ 로 부터 (x,y,z) 까지 선분은 Ω 의 부분집합이므로 이러한 적분은 의미가 있다.) 적분기호 아래에서 미분(정리 6.3)과 조건 (iii)을 사용하여, 첫

번째 항등식은

$$\begin{aligned} p &= R_y - Q_z = -\int_0^x (q_y(u,y,z) + r_z(u,y,z))\,du + g_y - h_z \\ &= \int_0^x p_x(u,y,z)\,du + g_y - h_z = p(x,y,z) - p(0,y,z) + g_y - h_z. \end{aligned}$$

그러므로 (8.19) 는 $g_y = p(0,y,z)$ 과 $h = 0$ 에 의하여 풀릴 수 있다. 즉,

$$Q = \int_0^x r(u,y,z)\,du,\ R = \int_0^y p(0,v,z)\,dv - \int_0^x q(u,y,z)\,du.$$

■

정리 8.6은 다음 성질

주어진 $(x,y,z) \in \Omega$ **에 대해, 선분** $L((0,y,z);(x,y,z))$ **과** $L((0,0,z);(0,y,z))$ **은 모두** Ω **의 부분집합**

을 만족하는 임의의 3차원 영역 Ω에 대하여 성립한다(연습문제 9).

연습문제 (8.6)

1. 다음 각각에 대해, $\int_C F \cdot T\,ds$ 를 계산하여라.

   (a) C는 원기둥 $x^2 + y^2 = 1$ 과 $z = -x$ 가 교차하는 것에 의해 이루어진 유향곡선, z-축의 양의 방향에서 보았을 때 시계반대방향이고 $F(x,y,z) = (xy^2, 0, xyz)$

   (b) C는 기둥 $z = y^3$과 원기둥 $x^2 + y^2 = 3$ 의 교차선, 양의 z-축의 위에서 보았을 때 시계방향이고 $F(x,y,z) = (e^x + z, xy, ze^y)$

2. 다음 각각에 대해 $\iint_S \text{curl}\, F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ 를 계산하여라.

   (a) S 는 $y = x^2$, $z = 1 - y$ 에 의해 둘러싸인 $z \geq 0$ 에 있는 바닥없는 곡면, $\mathbf{n}$은 외향법선이고 $F(x,y,z) = (x \sin z^3, y \cos z^3, x^3 + y^3 + z^3)$.

   (b) S 는 절단된 포물면 $z = 3 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$, $\mathbf{n}$ 은 외향법선이고 $F(x,y,z) = (y, xyz, y)$.

(c) S 는 반구 $z = \sqrt{10 - x^2 - y^2}$, $\mathbf{n}$은 내향법선이고 $F(x, y, z) = (x, x, x^2y^3 \log(z + 1))$.

(d) S 는 $x = 0, y = 0, x + 2y + 3z = 1, z \geq 0$ 에 의해 둘러싸인 상 반평면 $z \geq 0$ 내의 바닥없는 사면체, $\mathbf{n}$은 외향법선이고 $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$.

3. 다음 각각에 대해 스토크스 정리 혹은 가우스 정리를 이용하여 $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$를 구하여라.

(a) S 는 구 $x^2+y^2+z^2 = 1$, $\mathbf{n}$은 외향법선이고 $F(x, y, z) = (xz^2, x^2y-z^3, 2xy+y^2z)$

(b) S 는 공 $B_1(\mathbf{0})$ 의 내부에 놓인 평면 $z = y$ 의 일부, $\mathbf{n}$은 상향법선이고 $F(x, y, z) = (xy, xz, -yz)$

(c) S 는 절단된 원뿔 $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, $2 \leq y \leq 4$, $\mathbf{n}$은 외향법선이고 $F(x, y, z) = (x, -2y, z)$

(d) S 는 절단된 포물면 $z = 4-x^2-y^2$, $0 \leq z \leq 4$ 와 $z = x^2+y^2-4$, $-4 \leq z \leq 0$ 의 합, $\mathbf{n}$은 외향법선이고

$$F(x, y, z) = (x + y^2 + \sin z, x + y^2 + \cos z, \cos x + \sin y + z).$$

(e) S 는 세 곡면 $z = x^2 + y^2\ (0 \leq z \leq 2), 2 = x^2 + y^2\ (2 \leq z \leq 5), z = 7 - x^2 - y^2\ (5 \leq z \leq 6)$ 의 합, $\mathbf{n}$은 외향법선이고 $F(x, y, z) = (2y, 2z, 1)$

4. 다음 각각에 대해 스토크스 정리 혹은 가우스 정리를 이용하여 $\int_S \omega$ 를 계산하여라.

(a) S 는 외향법선을 가진 원기둥 입체 $y^2 + z^2 \leq 9,\ 0 \leq x \leq 2$ 의 위상경계이고 $\omega = xy\, dydz + (x^2 - z^2)\, dzdx + xz\, dxdy$.

(b) S 는 외향법선을 가진 절단 원기둥 $x^2 + z^2 = 8,\ 0 \leq y \leq 1$ 이고 $\omega = (x - 2z)\, dydz - y\, dzdx$.

(c) S 는 외향법선을 가진 $R = [0, \pi/2] \times [0, 1] \times [0, 3]$ 의 위상경계이고 $\omega = e^y \cos x\, dydz + x^2z\, dzdx + (x + y + z)\, dxdy$.

(d) S 는 타원기둥입체 $2x^2 + z^2 \leq 1$ 과 평면 $x = y$ 의 교차선이고 양의 x-축을 향하는 법선을 갖는다. 그리고 $\omega = x\, dydz - y\, dzdx + \sin y\, dxdy$.

5. 그린정리가 스토크스 정리의 따름정리임을 증명하여라.

6. Π 를 단위법선 $\mathbf{n}$ 을 가진 $\mathbb{R}^3$ 의 평면, $\mathbf{x}_0 \in \Pi$ 라 하자. 각 $r > 0$ 에 대하여 S_r 을 반지름 r 이고 중심 $\mathbf{x}_0$ 인 Π 내의 원판이라 하자. 즉, $S_r = B_r(\mathbf{x}_0) \cap \Pi$. 만일 $F : B_1(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ 이 $\mathcal{C}^1$ 이고 ∂S_r 이 $\mathbf{n}$ 에 의해 유도된 방향을 갖는다면
$$\text{curl}\, F(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\sigma(S_r)} \int_{\partial S_r} F \cdot T\, ds.$$
를 증명하여라.

7. S를 단위 법선 $\mathbf{n}$ 과 모든 $\mathcal{C}^1$ 함수 F에 대해 스토크스 정리의 결론을 만족하는 공집합이 아닌 경계 ∂S를 가진 유향곡면이라 하자.

   (a) $F : S \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 이 $\mathcal{C}^1$, ∂S 가 매끄러우며 T 가 $\mathbf{n}$ 에 의해 유도된 ∂S 위의 단위접선 벡터라고 하자. $T(\mathbf{x}_0)$ 와 $F(\mathbf{x}_0)$ 사이각이 임의의 $\mathbf{x}_0 \in \partial S$ 에 대해 결코 둔각이 아니고 $\iint_S \text{curl}\, F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$ 이면 모든 $\mathbf{x}_0 \in \partial S$ 에 대해 $T(\mathbf{x}_0)$ 와 $F(\mathbf{x}_0)$ 는 수직이라는 것을 증명하여라.

   (b) $F, F_k : S \to \mathbb{R}^3$ 가 $\mathcal{C}^1$ 이고 $F_k \to F$ 가 ∂S 위에서 고르게 수렴하면
$$\lim_{k \to \infty} \iint_S \text{curl}\, F_k \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S \text{curl}\, F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$
   임을 증명하여라

8. E 가 $(x, y) \in E$ 이면 $(0, 0)$ 에서 $(x, 0)$까지의 선분과 $(x, 0)$에서 (x, y)까지의 선분 모두 E의 부분집합이 되는 2차원 영역이라고 가정하자. 만일 $F : E \to \mathbb{R}^2$ 이 $\mathcal{C}^1$ 이면 다음이 동치임을 증명하여라.

   (a) 어떤 $f : E \to \mathbb{R}$ 에 대해 E 위에서 $F = \nabla f$.

   (b) $F = (P, Q)$ 는 완전(exact), 즉 E 위에서 $Q_x = P_y$.

   (c) 시계반대방향인 모든 조각적 매끄러운 곡선들 $C = \partial\Omega$ 에 대하여 $\int_C F \cdot T\, ds = 0$ 이다. 여기서 Ω 는 그린정리의 결론을 만족하는 2차원의 영역이고 $\Omega \subset E$ 이다.

9. Ω를 3 차원의 영역이라 하고 $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 가 Ω 위에서 $\mathcal{C}^1$ 이라 하자. 각 $(x, y, z) \in \Omega$ 에 대하여 선분 $L((x, y, 0); (x, y, z))$ 과 $L((x, 0, 0); (x, y, 0))$ 이 모두 Ω 의 부분집합이라고 가정하자. 다음이 동치임을 증명하여라.

(a) Ω 위에서 curl $G = F$를 만족하는 $\mathcal{C}^2$함수 $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 가 존재한다.

(b) $F, E, S = \partial E$ 가 가우스 정리의 결론을 만족하고 $E \subset \Omega$라 하면

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0.$$

(c) Ω 위의 모든 곳에서 항등식 div $F = 0$ 이다.

10. F 는 $\mathcal{C}^1$ 이고 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 에서 완전, 즉 $P_y = Q_x$ 라 하자.

(a) C_1 과 C_2 가 시계반대방향으로 교차하지 않는 매끄러운 단순곡선이라 가정하자. 그리고 E는 위상경계 ∂E 가 C_1 과 C_2 의 자취의 합집합인 2차원 영역이라 하자. (E 가 C_j 중 하나는 바깥 경계이고 다른 하나는 안쪽 경계인 구멍을 가진다는 것을 의미한다.) 만일 $(0,0) \notin E$ 라면 다음을 증명하여라.

$$\int_{C_1} F \cdot T\, ds = \int_{C_2} F \cdot T\, ds.$$

(b) E가 $(0,0) \in E^o$ 를 만족하는 2차원 영역이라고 가정하자. ∂E 가 시계반대방향인 매끄러운 단순곡선이고

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

라 할 때, $\int_{\partial E} F \cdot T\, ds$ 를 계산하여라.

(c) 함수 $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ 에 대하여 3차원의 영역, 매끄러운 단순곡면에 대하여 (a)와 유사한 것을 진술하고 증명하여라.

11. 스토크스 정리를 사용하여 다음 적분을 계산하여라.

(a) $\int_C y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$, $C : \phi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

(b) $\int_C (y^2+z^2)\, dx + (x^2+z^2)\, dy + (x^2+y^2)\, dz$, C 는 반구 $x^2+y^2+z^2 = 4x$, $z > 0$ 와 원통 $x^2+y^2 = 2x$ 의 교선

(c) $\int_C 2y\, dx - 2x\, dy + z^2 x\, dz$, $C : \phi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 5)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

(d) $\int_C yz^2\, dx + (xz^2 - 2y)\, dy + 2xyz\, dz$, $C : \phi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

12. 만일 S 가 조각적으로 매끄러운 단순곡면이고 C 에 의해 유계이면,

$$\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_C \mathbf{a} \times \phi \cdot d\phi.$$

여기서, $\mathbf{a}$ 은 상수벡터이고 $C : \phi = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$ 이다.

13. 만일 u 가 S 위에서 연속적으로 미분가능하고 v 는 S 위에서 2 번 연속적으로 미분가능이면,

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla u \times \nabla v \, d\sigma = \int_C u \nabla v \cdot d\phi.$$

여기서 $C : \phi = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ 이다.