3 곡선기하학

우리가 잘 알고 있는 평면기하학에서 삼각형의 합동(congruence)을 어떻게 정의할 수 있는가? 한 삼각형을 다른 삼각형으로 이동할 수 있는 평면 위의 강체운동(rigid motion)이 존재할 때 두 삼각형은 합동이라고 정의한다. 합동인 두 삼각형 사이에는 대응하는 각의 크기, 대응하는 변의 길이는 물론이고 두 삼각형의 면적과 같은 유클리드적 성질은 모두 같다. 이 단원에서는 유클리드 공간의 강체운동에 관하여 자세하게 공부할 것이다.

3-1 $\mathbf{E}^3$의 등장변환

유클리드 공간의 등장변환(isometry) 또는 강체운동은 점 사이에 유클리드 거리를 보존시켜 주는 사상의 특별한 형태로 볼 수 있다(제 2 장의 정의 1-2).

정의 1-1

$\mathbf{E}^3$의 모든 점 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$에 대하여

$$d(F(\mathbf{p}),\ F(\mathbf{q}))=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$$

를 만족하는 사상 $F: \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$을 $\mathbf{E}^3$의 **등장사상** 또는 **등장변환**(isometry)이라고 한다.

예제 1-2

(1) **평행이동**(translations): $\mathbf{a}$를 $\mathbf{E}^3$의 정점, T를 $\mathbf{E}^3$의 모든 점에 $\mathbf{a}$를 더해 주는 사상이라 할 때, 모든 점 $\mathbf{p}$에 대하여

$$T(\mathbf{p})=\mathbf{p}+\mathbf{a}$$

로 정의하자. 이때 T를 $\mathbf{a}$만큼의 **평행이동**(translation)이라 한다. 이때

$$\begin{aligned} d(T(\mathbf{p}),\ T(\mathbf{q})) &= d(\mathbf{p}+\mathbf{a},\ \mathbf{q}+\mathbf{a}) \\ &= \|(\mathbf{q}+\mathbf{a})-(\mathbf{p}+\mathbf{a})\| = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| = d(\mathbf{p},\ \mathbf{q}) \end{aligned}$$

이므로, 평행이동 T는 등장변환이다.

(2) **좌표축 중심의 회전이동**(rotation around a coordinate axis): $\mathbf{E}^3$의 점 $\mathbf{p}(p_1,\ p_2,\ p_3)$을 z축을 중심으로 θ만큼 회전하여 얻은 점을 $\mathbf{q}(q_1,\ q_2,\ q_3)$이라 하면

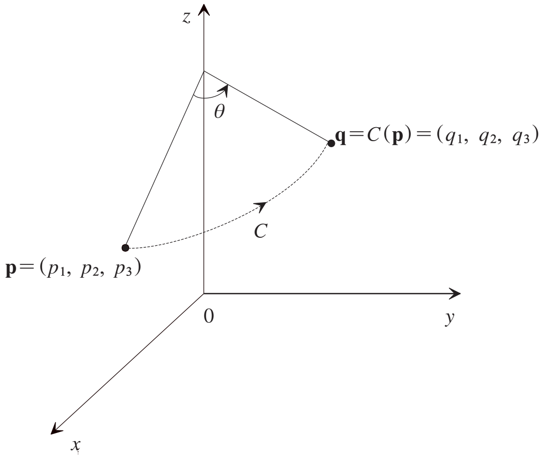


그림 3-1

$$q_1 = p_1\cos\theta - p_2\sin\theta$$
$$q_2 = p_1\sin\theta + p_2\cos\theta$$
$$q_3 = p_3$$

이 성립한다. 따라서 z축을 중심으로 θ만큼의 회전 C는 모든 점 $\mathbf{p}$에 대하여

$$C(\mathbf{p}) = C(p_1, p_2, p_3) = (p_1\cos\theta - p_2\sin\theta,\ p_1\sin\theta + p_2\cos\theta,\ p_3)$$

이다. 분명히 C는 일차변환(linear transformation)이다. 물론 C가 유클리드 거리를 보존한다고 하는 것은 쉽게 계산할 수 있으므로 C는 등장변환이다. 한편 C는 모든 점 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$에 대하여

$$C(\mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

를 만족하므로 C는 스칼라곱도 보존한다. □

이와 같이 스칼라곱을 보존하는 일차변환을 **직교변환**(orthogonal transformation)이라고 한다(이 정의에서 '직교'라는 의미는 제 3 장 3-2절에서 명확해질 것이다).

F와 G를 $\mathbf{E}^3$의 사상이라 하면, 합성함수 GF도 $\mathbf{E}^3$의 등장변환이다. 이에 대한 정리를 보자.

정리 1-3 합성함수의 등장변환

F와 G가 $\mathbf{E}^3$의 등장변환이면 GF도 $\mathbf{E}^3$의 등장변환이다.

증명 G는 등장변환이므로

$$d(G(F(\mathbf{p})),\ G(F(\mathbf{q})))=d(F(\mathbf{p}),\ F(\mathbf{q}))$$

이다. 한편 F도 등장변환이므로

$$d(F(\mathbf{p}),\ F(\mathbf{q}))=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$$

이다. 따라서

$$d(GF(\mathbf{p}),\ GF(\mathbf{q}))=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$$

이므로 GF는 등장변환이다. ■

$F:\mathbf{E}^3\to\mathbf{E}^3$가 일대일이고 위로(one to one and onto)의 함수이면, 점 $F(\mathbf{p})$를 $\mathbf{p}$로 되돌리는 역함수 $F^{-1}:\mathbf{E}^3\to\mathbf{E}^3$가 유일하게 존재한다.

F와 F^{-1} 사이의 관계는

$$FF^{-1}=I,\quad F^{-1}F=I$$

로 표현된다. 이 경우 I는 $\mathbf{E}^3$의 항등사상(identity mapping)이고, 모든 $\mathbf{p}$에 대하여 $I(\mathbf{p})=\mathbf{p}$이다. $\mathbf{E}^3$의 평행이동(translation)은 가장 간단한 등장변환이다.

정리 1-4

(1) S와 T가 평행이동이면 $ST=TS$도 평행이동이다.

(2) T가 $\mathbf{a}$만큼의 평행이동이면, $-\mathbf{a}$만큼 평행이동인 T^{-1}가 존재한다.
(3) $\mathbf{E}^3$의 임의의 두 점 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$에 대하여 $T(\mathbf{p})=\mathbf{q}$인 평행이동 T가 유일하게 존재한다.

증명 (1)과 (2)는 쉽게 증명되므로 (3)을 증명하자.
T를 $\mathbf{a}$만큼의 평행이동이라 하고 $T(\mathbf{p})=\mathbf{q}$라 하면

$$T(\mathbf{p})=\mathbf{p}+\mathbf{a}=\mathbf{q}$$

이다. 따라서 $\mathbf{a}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$이므로 T는 $\mathbf{q}-\mathbf{p}$만큼의 평행이동이다. ■

정리 1-5

$C : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$이 직교변환이면 C는 등장변환이다.

증명 먼저 C는 노름을 보존한다는 사실을 증명하자. C는 직교변환이므로

$$\|C(\mathbf{p})\|^2=C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{p})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=\|\mathbf{p}\|^2$$

이다. 그러므로 모든 점 $\mathbf{p}$에 대하여 $\|C(\mathbf{p})\|=\|\mathbf{p}\|$이다. 따라서 C가 선형이란 사실을 이용하면, 모든 점 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$에 대하여

$$\begin{aligned} d(C(\mathbf{p}),\ C(\mathbf{q}))&=\|C(\mathbf{p})-C(\mathbf{q})\|=\|C(\mathbf{p}-\mathbf{q})\| \\ &=\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| \\ &=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q}) \end{aligned}$$

가 성립하므로 C는 등장변환이다. ■

이 절의 핵심은 정리 1-7이다. 이 정리는 모든 등장변환 F는 직교변환 C와 평행이동 T에 의하여 표현될 수 있음을 말해 준다. 이 증명을 하기 위하여 다음의 예비정리를 살펴보자.

정리 1-6

$F: \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$이 등장변환이고 $F(0)=0$이면 F는 직교변환이다.

증명 F는 등장변환이므로 $d(F(\mathbf{p}),\ F(\mathbf{q}))=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$이다. 따라서

$$\|F(\mathbf{p})-F(\mathbf{q})\|=\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$$

이므로 노름과 스칼라곱의 관계로부터

$$(F(\mathbf{p})-F(\mathbf{q}))\cdot(F(\mathbf{p})-F(\mathbf{q}))=(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

이다. 정리하면

$$\|F(\mathbf{p})\|^2-2F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{q})+\|F(\mathbf{q})\|=\|\mathbf{p}\|^2-2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+\|\mathbf{q}\|^2$$

그런데 가정으로부터 $F(0)=0$이므로

$$\|F(\mathbf{p})\|=d(0,\ F(\mathbf{p}))=d(F(0),\ F(\mathbf{p}))=d(0,\ \mathbf{p})=\|\mathbf{p}\|$$

이다. 따라서

$$F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{q})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \tag{$*$}$$

가 성립한다. 즉 F는 스칼라곱을 보존한다.

다음, F가 선형변환임을 증명하자.

$$\mathbf{u}_1=(1,\ 0,\ 0),\ \mathbf{u}_2=(0,\ 1,\ 0),\ \mathbf{u}_3=(0,\ 0,\ 1)$$

을 단위점(unit points)이라 하면

$$\mathbf{p}=(p_1,\ p_2,\ p_3)=\sum p_i\mathbf{u}_i,\quad \mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=\delta_{ij}$$

로 쓸 수 있다. 그런데 F는 스칼라곱을 보존하므로 $F(\mathbf{u}_1)$, $F(\mathbf{u}_2)$, $F(\mathbf{u}_3)$도 서로 직교하는 틀장이다. 따라서 직교전개에 의하여

$$F(\mathbf{p})=\sum F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{u}_i)F(\mathbf{u}_i)$$

로 표현할 수 있다. 그런데 식 $(*)$에 의하여

$$F(\mathbf{p}) \cdot F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_i = p_i$$

이므로

$$F(\mathbf{p}) = \sum p_i F(\mathbf{u}_i)$$

가 성립한다. 이 식으로부터 F가 선형변환일 조건

$$F(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = aF(\mathbf{p}) + bF(\mathbf{q})$$

가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. ■

정리 1-7	등장변환의 분해정리

$F : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$이 등장변환이면

$$F = TC$$

인 평행이동 T와 직교변환 C가 유일하게 존재한다.

증명 먼저 $F = TC$인 T와 C가 존재함을 보이자. T를 $F(\mathbf{0})$만큼의 평행이동이라 하면 T^{-1}는 $-F(\mathbf{0})$인 평행이동이다(정리 1-4).

그런데 $T^{-1}F$ 또한 등장변환이고(정리 1-3)

$$(T^{-1}F)(\mathbf{0}) = T^{-1}(F(\mathbf{0})) = F(\mathbf{0}) - F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

이므로 $T^{-1}F$는 직교변환이다(정리 1-6). 따라서 $T^{-1}F = C$를 만족하는 직교변환 C가 존재한다. 이 식으로부터 $F = TC$를 얻는다.

다음, T와 C의 유일성을 증명하자.

$$F = T^* C^*$$

인 T^*와 C^*가 존재한다고 할 때 $T = T^*$이고 $C = C^*$임을 증명하면 된다. 그런데 $TC = T^*C^*$이므로 $C = T^{-1}T^*C^*$이다. 한편 C와 C^*는 일차변환이므로 $C(\mathbf{0}) = C^*(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$이다. 따라서

$$(T^{-1}T^*)(\mathbf{0})=\mathbf{0}$$

이 성립하고, $T^{-1}T^*$는 평행이동이므로 $T^{-1}T^*=I$이어야 한다. 이 식으로부터

$$T=T^*$$

을 얻는다. 따라서 $TC=T^*C^*$이므로 $C=C^*$임이 쉽게 증명된다. ■

등장변환 F가 직교변환 C와 평행이동 T에 의하여 $F=TC$로 유일하게 표시될 때 C를 F의 **직교부분**(orthogonal part), T를 F의 **평행이동부분**(translation part)이라 한다. 일반적으로 TC와 CT는 같지 않음에 유의하여야 한다(문제 $\boxed{1}$). 분해정리(decomposition theorem)라 불리는 정리 1-7은 $\mathbf{E}^3$의 등장변환에 대한 아주 중요한 내용이다.

이제 등장변환 $F=TC$에 대한 중요한 공식을 구하여 보자. 만약 (c_{ij})를 일차변환 C의 행렬이라 하면 점 $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$에 대하여 관계식

$$C(p_1, p_2, p_3)=(\sum c_{1j}p_j, \sum c_{2j}p_j, \sum c_{3j}p_j)$$

를 만족한다. 그런데 C는 직교일차변환이므로 행렬 (c_{ij})는 직교행렬, 즉 역행렬과 전치행렬이 같은 행렬이다. 다시 $F=TC$로 되돌아가자. T를 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$만큼의 평행이동이라 하면

$$F(\mathbf{p})=TC(\mathbf{p})=C(\mathbf{p})+\mathbf{a}$$

이다. 따라서 $C(\mathbf{p})$에 대한 공식을 대입하면

$$F(\mathbf{p})=F(p_1, p_2, p_3)=(a_1+\sum c_{1j}p_j, a_2+\sum c_{2j}p_j, a_3+\sum c_{3j}p_j)$$

이다. $F(\mathbf{p})=\mathbf{q}=(q_1, q_2, q_3)$이라 할 때 열벡터표기법을 사용하면

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

를 얻는다.

문제 3-1

(A, B, C는 직교변환 또는 그들의 행렬, T_a는 $\mathbf{a}$만큼의 평행이동을 뜻한다고 하자.)

1 증명하여라. $CT_a = T_{C(a)}C$

2 주어진 등장변환 $F = T_aA$, $G = T_bB$에 대하여 FG와 GF의 평행이동부분과 직교부분을 구하여라.

3 등장변환 $F = T_aC$는 등장변환이 되는 역사상 F^{-1}을 가짐을 증명하여라. F^{-1}의 평행이동부분과 직교부분을 구하여라.

4 행렬

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

는 직교변환임을 증명하기 위하여 점 $\mathbf{p} = (3, 1, -6)$, $\mathbf{q} = (1, 0, 3)$에 대하여 $C(\mathbf{p})$와 $C(\mathbf{q})$를 구하고 $C(\mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$임을 보여라.

5 등장변환 $F = T_aC$에 대하여 $\mathbf{a} = (1, -3, 1)$이고

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이라 하자. $\mathbf{p} = (2, -2, 8)$일 때, 다음과 같은 점 $\mathbf{q}$의 좌표를 구하여라.

(1) $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$ (2) $\mathbf{q} = F^{-1}(\mathbf{p})$

(3) $\mathbf{q} = (CT_a)(\mathbf{p})$

6 다음 각 경우에 F가 $\mathbf{E}^3$의 등장변환이 되는가? 만약 그렇다면 그것의 평행이동부분과 직교부분을 구하여라.

(1) $F(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$ (2) $F(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$, 단 $\|\mathbf{a}\| = 1$

(3) $F(\mathbf{p}) = (p_3 - 1, p_2 - 2, p_1 - 3)$ (4) $F(\mathbf{p}) = (p_1, p_2, 1)$

7 $\mathbf{E}^3$의 모든 등장변환의 집합 ξ은 군이 됨을 증명하여라. 이 군의 연산은 함수의 합성이므로 이루어진다. 이때 ξ을 **유클리드 군**이라 한다. 다음을 만족하는 군 G의 부분집합 H를 G의 **부분군**이라 한다.

(1) $g_1, g_2 \in H \Rightarrow g_1 g_2 \in H$ (2) $g \in H \Rightarrow g^{-1} \in H$

(3) G의 항등원 e는 H의 원소이다.

8 $\mathbf{E}^3$의 모든 평행이동의 집합 $T(3)$과 모든 직교변환의 집합 $O(3)$은 각각 유클리드 군의 부분군임을 증명하여라. $O(3)$을 $\mathbf{E}^3$의 직교군(orthogonal group)이라 한다. $\mathbf{E}^3$의 어떤 등장변환이 $T(3)$와 $O(3)$ 모두에 속하는가?

9 V^*와 W^*를 유한차원 벡터공간이라 하고, $F: V^* \to W^*$를 일치변환이라 할 때 다음 조건이 동치임을 증명하여라.

(1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V^*$에 대하여 $F(\mathbf{v}_1) \cdot F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$이다.

(2) $\mathbf{v} \in V^*$에 대하여 $\|F(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$이다.

(3) $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$이 V^*의 직교기저이면 $\{F(\mathbf{v}_1), \cdots, F(\mathbf{v}_n)\}$은 W^*의 직교기저이다.

(4) $\{F(\mathbf{v}_1), \cdots, F(\mathbf{v}_n)\}$이 W^*의 직교기저인 V^*의 직교기저 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$이 존재한다.

3-2 등장변환의 미분사상

제 1 장에서 임의의 사상 $F: \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$는 점 $\mathbf{p}$에서의 접벡터 $\mathbf{v}$를 $F(\mathbf{p})$에서의 접벡터 $F_*(\mathbf{v})$로 옮겨 주는 미분사상 F_*을 소유하고 있음을 보았다. F가 등장변환일 때 미분사상은 매우 간단하게 표현된다. 이 절에서는 접벡터와 점 사이의 거리를 매우 중요하게 다루므로 임시로 적용점을 다시 사용하기로 한다.

정리 2-1

등장변환 F의 직교부분을 C라 하면, $\mathbf{E}^3$의 모든 접벡터 $\mathbf{v}_p$에 대하여 다음 관계가 성립한다.

$$F_*(\mathbf{v}_p) = C(\mathbf{v})|_{F(p)}$$

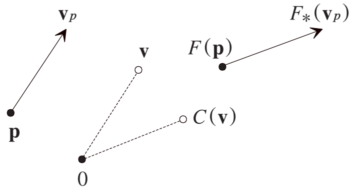


그림 3-2

이 정리를 다시 설명해 보자. $F_*(\mathbf{v}_p)$를 얻기 위하여, 먼저 $\mathbf{v}_p$를 근본적으로 대응하는 점 $\mathbf{v}$로 이동시킨다. 다음 F의 직교성분 C를 적용하여 $C(\mathbf{v})$를 구한 후, 점 $F(\mathbf{p})$에서 이것에 대응하는 접벡터로 점 $C(\mathbf{v})$를 이동하면 된다(그림 3-2). 그러므로 $\mathbf{E}^3$의 점 $\mathbf{p}$에서 모든 접벡터는 F_*에 의하여 위와 같은 결정방법으로 회전된 후 $\mathbf{p}$에 의하여 결정되는 점 $F(\mathbf{p})$를 적용하면 된다.

증명 정리 1-7에서처럼 $F=TC$라 하자. 이때 T를 $\mathbf{a}$만큼의 이동이라 하면 $F(\mathbf{p})=C(\mathbf{p})+\mathbf{a}$이다. 만약 $\mathbf{v}_p$를 $\mathbf{E}^3$의 접벡터라 하면, 제 1 장 정의 7-4에 의하여 $F_*(\mathbf{v}_p)$는 곡선 $t\longrightarrow F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$의 초기속도벡터이다. 그런데 C의 선형성을 사용하면

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) &= TC(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=T(C(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v})) \\ &= \mathbf{a}+C(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v})=F(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

이므로 $F_*(\mathbf{v}_p)$는 곡선 $t\longrightarrow F(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v})$의 초기속도벡터, 즉 접벡터 $C(\mathbf{v})|_{F(p)}$이다. ■

위의 결과를 유클리드 좌표로 나타낼 수 있다.

$$F_*(\mathbf{v}_p)=F_*(\sum v_j U)=\sum c_{ij}v_j\bar{U}_i$$

단, $C=(c_{ij})$는 등장변환 F의 직교성분이고, U_i와 $\bar{U}_i$는 각각 $\mathbf{p}$, $F(\mathbf{p})$에서 적용된 자연틀장이다.

정리 2-2	등장변환과 내적

등장변환은 접벡터의 내적을 보존한다. 즉 F를 등장변환이라 하면 $\mathbf{E}^3$의 접벡터 $\mathbf{v}_p$와 $\mathbf{w}_p$에 대하여

$$F_*(\mathbf{v}_p) \cdot F_*(\mathbf{w}_p) = \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{w}_p$$

가 성립한다.

증명 C를 F의 직교성분이라 하자. C는 내적을 보존하므로 정리 2-1과 접벡터의 내적에 관한 제 2 장의 정리 1-3에 의하여

$$\begin{aligned} F_*(\mathbf{v}_p) \cdot F_*(\mathbf{w}_p) &= C(\mathbf{v})|_{F(p)} \cdot C(\mathbf{w})|_{F(p)} = C(\mathbf{v}) \cdot C(\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{w}_p \end{aligned}$$

이 성립한다. ■

이 정리와 정리 2-3을 증명함으로써 정리 2-1의 관계식의 중요성을 알 수 있다. 이 정리로부터 실제로 적용점을 사용하지 않아도 무방함을 알았다. 그러므로 위의 정리를 단순히 $F_*(\mathbf{v}) \cdot F_*(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$로 쓰기로 하자.

등장변환에 의하여 내적이 보전되었으므로, 노름과 직교성이 보존된다는 것은 자연히 유도된다. 만약 F가 등장변환이면 $\|F_*(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$이고, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 직교하면 $F_*(\mathbf{v})$와 $F_*(\mathbf{w})$도 직교한다. 결국 등장변환 F에 의하여 노름과 직교성이 보존되므로 $\mathbf{E}^3$의 틀도 보존된다. 즉 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$를 점 $\mathbf{p}$에서의 틀이라 하면 $F_*(\mathbf{e}_1)$, $F_*(\mathbf{e}_2)$, $F_*(\mathbf{e}_3)$도 점 $F(\mathbf{p})$에서 틀이 된다. 왜냐하면 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$이므로 정리 2-2에 의하여 $F_*(\mathbf{e}_i) \cdot F_*(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$이기 때문이다.

정리 1-4의 (3)은 두 점이 어떻게 하여 이동을 유일하게 결정할 수 있는가를 보여 준다. 이제 두 개의 틀이 하나의 등장변환을 유일하게 결정한다는 사실을 증명하여 보자.

정리 2-3

$\mathbf{E}^3$의 점 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$에서의 틀을 각각 $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{f}_i$ $(i=1, 2, 3)$이라 하면 $F_*(\mathbf{e}_i)=\mathbf{f}_i$ $(i=1, 2, 3)$를 만족하는 등장변환 F가 가 유일하게 존재한다.

증명 먼저 등장변환의 **존재성**을 보이자. e_1, e_2, e_3와 f_1, f_2, f_3을 각각 두 개의 틀에 표준적으로 대응시키는 $\mathbf{E}^3$의 점이라 하자. C를 $C(e_i)=f_i$, $(i=1, 2, 3)$를 만족하는 $\mathbf{E}^3$의 유일한 일차변환이라 하면 직교변환임은 쉽게 알 수 있다. 이때 T를 점 $\mathbf{q}-C(\mathbf{p})$에 의한 이동이라 하면 등장변환 $F=TC$가 틀 $\mathbf{e}$를 틀 $\mathbf{f}$로 보내 준다는 것을 단언할 수 있다. 즉

$$F(\mathbf{p})=TC(\mathbf{p})=C(\mathbf{p})+\mathbf{q}-C(\mathbf{p})=\mathbf{q}$$

이므로 F에 의하여 점 $\mathbf{p}$를 $\mathbf{q}$로 옮길 수 있다. 한편 정리 2-1에 의하여

$$F_*(\mathbf{e}_i)=C(e_i)|_{F(p)}=(f_i)_{F(p)}=(f_i)_q=\mathbf{f}_i \quad (i=1, 2, 3)$$

이므로 F에 의하여 틀 $\mathbf{e}_i$를 $\mathbf{f}_i$로 변환할 수 있음을 알 수 있다.

F의 **유일성**을 증명하자. 정리 2-1을 만족하는 C는 요구된 등장변환의 유일한 직교부분에 대하여만 성립하고, 이동부분 T는 $C(\mathbf{p})$를 $\mathbf{q}$로 옮기는 것으로 결정되므로 $F=TC$는 유일하게 결정된다. ■

이 정리에서 등장변환 F의 명확한 계산은 어렵지 않다.

$\mathbf{e}_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3})_p$, $\mathbf{f}_i=(b_{i1},\ b_{i2},\ b_{i3})_q$, $(1\le i\le 3)$라 하면 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$는 각각 틀 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$와 $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$의 태도행렬이므로 직교행렬이다.

이제 C(엄격히 말하면 C의 행렬)가 ${}^tBA$임을 보이자. 이것은 ${}^tBA(e_i)=f_i$임을 보이면 된다. 예를 들어 열벡터 표기법을 사용하면

$$ {}^tBA\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = {}^tB\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} $$

즉 ${}^tBA(e_1)=f_1$ ($i=2, 3$인 경우도 마찬가지)이므로 ${}^tBA(\mathbf{e}_i)=\mathbf{f}_i$이다. 그러므로 등장변환 $F=TC$는

$$ T\text{는 } \mathbf{q}-C(\mathbf{p})\text{만큼의 이동} $$
$$ C={}^tBA $$

에 의하면 쉽게 계산할 수 있다. 실제로 예를 들어보자.

예제 2-4

점 $\mathbf{p}=(0,\ 1,\ 0)$에서의 틀 $\mathbf{e}_1=(2,\ 2,\ 1)/3$, $\mathbf{e}_2=(-2,\ 1,\ 2)/3$, $\mathbf{e}_3=(1,\ -2, 2)/3$ 을 점 $\mathbf{q}=(3, -1, 1)$에서의 틀 $\mathbf{f}_1=(1, 0, 1)/\sqrt{2}$, $\mathbf{f}_2=(0, 1, 0)$, $\mathbf{f}_3=(1,\ 0,\ -1)/\sqrt{2}$로 각각 옮겨 주는 등장변환 F를 구해보자.

틀 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$와 $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$의 태도행렬을 각각 A, B라 하면

$$ A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tB=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} $$

이므로

$$ C={}^tBA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} $$

한편, T는 $\mathbf{a}=\mathbf{q}-C(\mathbf{p})$에 의한 이동이므로

$$\mathbf{a}=\mathbf{q}-C(\mathbf{p})=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ -2 & 1 & 2\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-\frac{4}{3}\\1-\frac{4}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

이다. 따라서 구하려는 F는 위의 C와 T에 의하여 결정된다. 관계식

$$\begin{aligned}F(\mathbf{p})=TC(\mathbf{p})=C(\mathbf{p})+\mathbf{a}&=\left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)+\left(3,\ -\frac{4}{3},\ 1-\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)\\&=(3,\ -1,\ 1)=\mathbf{q}\end{aligned}$$

는 F에 의하여 점 $\mathbf{p}$가 $\mathbf{q}$로 옮겨짐을 확인하여 준다.

한편 $C(e_i)={}^tBA(e_i)=f_i$를 확인할 수 있으므로, F는 $F_*(\mathbf{e}_i)=\mathbf{f}_i$을 만족하는 등장변환이다.

문제 3-2

$\boxed{1}$ F가 평행이동이면 모든 접벡터 $\mathbf{v}$에 대하여 $F_*(\mathbf{v})$는 $\mathbf{v}$와 평행함을 보여라.

$\boxed{2}$ F와 G를 $\mathbf{E}^3$의 등장변환이라 할 때 식 $(GF)_*=G_*F_*$, $(F^{-1})_*=(F_*)^{-1}$이 성립함을 증명하여라.

$\boxed{3}$ $\mathbf{p}$에서 틀장 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$의 태도행렬을 A라 하자. 만약 F를 $\mathbf{O}$에서 자연틀장 U_1, U_2, U_3를 위의 틀장 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$으로 보내는 등장변환이라 하면 $F=T_pA^{-1}$임을 증명하여라$(A^{-1}={}^tA)$.

$\boxed{4}$ $\mathbf{q}$에서 틀장 $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$의 태도행렬을 B라 하자. 등장변환 F가 문제 $\boxed{3}$의 틀장 $\mathbf{e}$를 틀장 $\mathbf{f}$로 옮겨 준다고 할 때, F의 직교부분은 $B^{-1}A$임을 문제 $\boxed{2}$를 사용하여 증명하여라.

$\boxed{5}$ (1) 등장변환 $F=TC$는 $\mathbf{q}$에 직교하고 $\mathbf{p}$를 지나는 평면은 $C(\mathbf{q})$에 직교하고 $F(\mathbf{p})$를 지나는 평면으로 옮겨 준다. 증명하여라.

(2) 이때 $(0,\ 1,\ 0)$에 직교하고 $\left(\frac{1}{2},\ -1,\ 0\right)$을 지나는 평면을 P라 하자. $F(\mathbf{p})$가 $(1,\ 0,\ -1)$에 직교하고 $(1,\ -2,\ 1)$을 지나는 평면이 되는 등장변환 $F=TC$를 구하여라.

3-3 향(向)

기하학에서 가장 흥미 있고 이해하기 어려운 것 중에 하나가 곡선의 향(orientation)에 관한 것이다. 직관적으로 오른손장갑과 왼손장갑의 구분은 향에 있다고 할 수 있다. 이 내용을 수학적으로 다루기 위하여 장갑 대신 틀로 바꾸어 조사하여 보자.

$\mathbf{E}^3$에서 모든 틀은 다음과 같이 두 가지 종류로 분류한다.

$\mathbf{E}^3$의 한 점에서 $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$은 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$의 태도행렬 A로 표시되므로

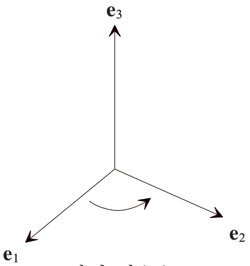
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \det A = \pm 1$$

이다. 값이 $+1$일 때 틀 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$는 **양의 향**(positively oriented) 또는 **오른손방향**(right-handed), -1일 때 **음의 향**(negatively oriented) 또는 **왼손방향**(left-handed)으로 되어 있다고 정의한다.

예제 3-1

(1) $\mathbf{E}^3$의 모든 점에서 자연틀 U_1, U_2, U_3와 같은 형태의 틀은 양의 방향이다.

(2) 틀 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$가 양의 방향일 필요충분조건은 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$이다. 프레



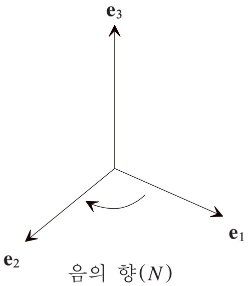


그림 3-3

네 틀은 $T\times N=B$이므로 항상 양의 방향이다.

(3) 양의 방향인 틀 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$에 대하여 그 외적은

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1$$

이다. 음의 방향인 틀에 대하여는 각각의 외적에서 두 벡터를 서로 바꾼 형태이다. 그러나 이 공식을 외울 필요는 없다. 단지 틀 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$의 향을 알기 위하여 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$을 각각 엄지, 검지, 중지에 일치시켰을 때 오른손에 일치하면 양, 왼손에 일치하면 음의 향이라 판단하면 편하다. □

C가 등장변환 F의 직교부분이라 하면 $C={}^tBA$로 표시되고, A와 B는 모두 직교행렬이므로(3-2절) C도 직교행렬이다. 그러므로 $\det C=\det({}^tBA)=\pm1$이다. 이제

$$\operatorname{sgn} F=\det C$$

로 정의하기로 하자.

다음의 정리는 등장변환 F에 의하여 틀장을 옮겨 줄 때 어떻게 변하는가를 보여 준다.

정리 3-2	틀의 등장변환

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$를 $\mathbf{E}^3$의 어떤 점에서의 틀이라 하고, F를 등장변환이라 하면 다음 관계가 성립한다.

$$F_*(\mathbf{e}_1)\cdot F_*(\mathbf{e}_2)\times F_*(\mathbf{e}_3)=\operatorname{sgn} F(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)$$

증명 $\mathbf{e}_j=\sum a_{jk}U_k$라 하면, 정리 2-1의 좌표형식에 의하여

$$F_*(\mathbf{e}_j)=\sum_{i,k}c_{ik}a_{jk}\bar{U}_i$$

이다. 단 $C=(c_{ij})$는 F의 직교부분이다. 따라서 틀 $F_*(\mathbf{e}_1)$, $F_*(\mathbf{e}_2)$, $F_*(\mathbf{e}_3)$의 태도행렬의 j-i요소가 $\sum c_{ik}a_{jk}$이므로 태도행렬은

$$\left(\sum_k c_{ik}a_{jk}\right)=\left(\sum_k c_{ik}\,{}^t a_{kj}\right)=C\,{}^tA$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} F_*(\mathbf{e}_1)\cdot F_*(\mathbf{e}_2)\times F_*(\mathbf{e}_3) &= \det(C\,{}^tA)=\det C\cdot\det{}^tA \\ &= \det C\cdot\det A=\operatorname{sgn} F(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

을 얻는다. ■

이 정리는 $\operatorname{sgn} F=+1$일 때 F_*는 양의 향인 틀을 양의 향인 틀로, 음의 향인 틀을 음의 향인 틀로 옮겨 주는 것을 보여 준다. 마찬가지로 $\operatorname{sgn} F=-1$일 때는 양의 향을 음으로, 음의 향을 양으로 변환시킨다.

정의 3-3

$\mathbf{E}^3$의 등장변환 F의 직교부분을 C라 하자. 이때 F는

$\operatorname{sgn} F=\det C=+1$일 때 향을 보존한다(orientation-preserving),

$\operatorname{sgn} F=\operatorname{def} C=-1$일 때 향을 반대로 한다(orientation-reversing)

고 말한다.

예제 3-4

(1) **평행이동**(translations): 모든 이동은 향을 보존한다. 기하학적으로 확실하다. 실제로 이동 T의 직교부분은 바로 항등사상이므로 $\operatorname{sgn} T=\det I=+1$이다.

(2) **회전이동**(rotations): z축을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 직교변환 C를 생각하자(예제 1-2). C의 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로 $\operatorname{sgn} C = \det C = +1$이다. 따라서 C는 향을 보존한다(문제 $\boxed{4}$).

(3) 반사이동(reflections): 거울을 사용함으로써 향을 반대로 할 수 있다. $\mathbf{E}^3$의 yz-평면을 거울이라 하자. 만약 그 평면을 향하여 바라보면 점 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$는 점 $R(\mathbf{p}) = (-p_1, p_2, p_3)$에 있는 것처럼 보인다. 이렇게 정의된 사상 R를 yz-평면에 관한 반사이동이라고 한다. 이 경우 변환 R는 행렬

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

로 표시되는 직교행렬이다. 따라서 R는 향을 반대로 바꾸는 등장변환이다. 거울을 바라보면 오른손의 거울상(mirror image)은 왼손으로 보인다는 것을 잘 알고 있을 것이다(그림 3-4). □

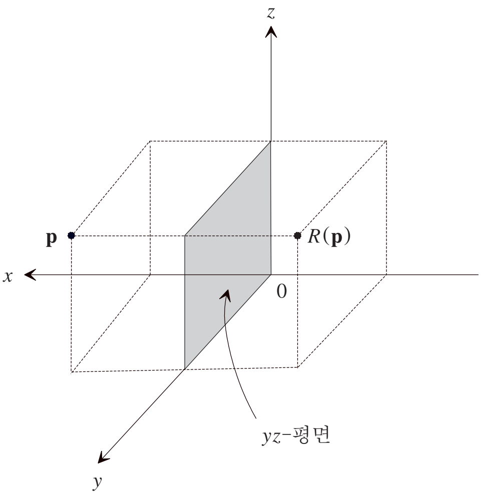


그림 3-4

벡터의 내적과 외적은 모두 유클리드 좌표로 정의되었다. 이미 두 벡터 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$에 대한 좌표를 얻기 위하여 사용한 틀 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$의 향이 무엇이든 간에 그 내적은 같은 공식

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\left(\sum v_i\mathbf{e}_i\right)\cdot\left(\sum w_j\mathbf{e}_j\right)=\sum v_iw_i$$

로 주어진다는 사실을 이미 알고 있다.

정리 3-5	벡터의 외적과 향

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$를 $\mathbf{E}^3$의 한 점에서 틀이라 하자. 만약 $\mathbf{v}=\sum v_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{w}=\sum w_i\mathbf{e}_i$라 하면 다음 관계식이 성립한다.

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\varepsilon\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix},\quad \text{단 } \varepsilon=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$$

증명 단순히 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$의 외적을 계산하고, 예제 3-1의 (3)을 이용하면 된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\times\mathbf{w}&=(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3)\times(w_1\mathbf{e}_1+w_2\mathbf{e}_2+w_3\mathbf{e}_3)\\ &=(v_1w_2-v_2w_1)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2+(v_2w_3-v_3w_2)\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\\ &\quad+(v_3w_1-v_1w_3)\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1\\ &=\varepsilon\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

(단 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$가 양의 향일 때 $\varepsilon=+1$, 음의 향일 때 $\varepsilon=-1$이다). ■

다음 정리는 외적에 대한 등장변환도 역시 향에 관계가 있음을 말해준다.

정리 3-6	등장변환과 외적

$\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 $\mathbf{p}$에서 $\mathbf{E}^3$의 접벡터, F를 등장변환이라 하면

$$F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\operatorname{sgn} F)F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w})$$

가 성립한다.

증명 $\mathbf{v}=\sum v_iU_i(\mathbf{p})$, $\mathbf{w}=\sum w_iU_i(\mathbf{p})$라 하자. F_*는 선형변환이므로

$$F_*(\mathbf{v})=\sum v_iF_*(U_i(\mathbf{p}))$$
$$F_*(\mathbf{w})=\sum w_iF_*(U_i(\mathbf{p}))$$

이다. 이제

$$F_*(U_i(\mathbf{p}))=\mathbf{e}_i$$

라 하고, 정리 3-5를 사용하여 계산하면

$$F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w})=\varepsilon\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\varepsilon F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

단 $\varepsilon=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=F_*(U_1(\mathbf{p}))\cdot F_*(U_2(\mathbf{p}))\times F_*(U_3(\mathbf{p}))$이다. 그런데 U_1, U_2, U_3는 양의 향이므로, 정리 3-2에 의하여

$$\begin{aligned}\varepsilon&=F_*(U_1(\mathbf{p}))\cdot F_*(U_2(\mathbf{p}))\times F_*(U_3(\mathbf{p}))\\&=\operatorname{sgn} F(U_1\cdot U_2\times U_3)=\operatorname{sgn} F\end{aligned}$$

이다. ■

문제 3-3

1 $\operatorname{sgn}(FG)=\operatorname{sgn}(F)\cdot\operatorname{sgn}(G)=\operatorname{sgn}(GF)$를 증명하고, $\operatorname{sgn}(F)=\operatorname{sgn}(F^{-1})$임을 추론하여라.

2 H_0을 향을 반대로 하는 등장변환이라 하면, 향을 반대로 하는 모든 등장변환은 H_0F로 유일하게 표현됨을 보여라. 단 F는 향을 보존하는 등장변환이다.

3 $\mathbf{v}=(3, 1, -1)$과 $\mathbf{w}=(-3, -3, 1)$을 어떤 점에서의 접벡터라 하자. 만약 C를 문제 3-1의 $\boxed{4}$에서 주어진 직교변환이라 하면 다음 공식이 성립함을 확인하여라.

$$C_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\operatorname{sgn}(C)\ C_*(\mathbf{v})\times C_*(\mathbf{w})$$

4 회전은 $\det(C)=+1$인 직교변환이다. 실제로, C는 한 축을 중심으로 $\mathbf{E}^3$를 회전시킨다는 것을 증명하여라. 주어진 회전 C에 대하여

$$C(\mathbf{e}_1)=\cos\theta\,\mathbf{e}_1+\sin\theta\,\mathbf{e}_2$$
$$C(\mathbf{e}_2)=-\sin\theta\,\mathbf{e}_1+\cos\theta\,\mathbf{e}_2$$
$$C(\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$$

를 만족하는 각 θ와 점 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$가 존재함을 보여라(그림 3-5).

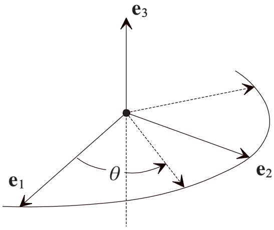


그림 3-5

5 $\mathbf{a}$를 $\|\mathbf{a}\|=1$인 점이라 할 때, 공식

$$C(\mathbf{p})=\mathbf{a}\times\mathbf{p}+(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}$$

는 직교변환을 정의한다. 이것을 증명하고, $\mathbf{E}^3$에서 이것의 일반적 효과를 기술하여 보아라.

6 다음을 증명하여라.

(1) $\mathbf{E}^3$의 모든 회전의 집합 $O^+(3)$은 직교군 $O(3)$의 부분군이다(문제 3-1의 $\boxed{8}$).

(2) 향을 보존하는 $\mathbf{E}^3$의 모든 등장변환의 집합 ξ^+은 유클리드군 ξ의 부분군이다.

7 수직선 $\mathbf{E}^1$의 모든 등장변환에 대한 하나의 공식을 구하여라. $\mathbf{E}^2$에 관하여도 함께 조사하여 보아라($\varepsilon=\pm1$을 사용하라). 이 등장변환 중에서 어느 것이 향을 보존하는가?

3-4 유클리드 기하학

이 단원의 서두에서 평면기하학의 기본 특징을 살펴보았다. 만약 한 삼각형을 다른 삼각형으로 보내는 등장변환이 존재한다면 두(합동) 삼각형은 틀림없이 똑같은 기하학적 성질을 가질 것이다. 이것은 증명이 필요한 것이 아니라 '한 삼각형의 기하학적 성질'에 관한 정의이다. 좀더 일반화하면 유클리드 기하학은 유클리드 공간의 등장변환에 의하여 보존되는 총체적 개념으로 정의될 수 있다. 예를 들어 정리 2-2는 접벡터에 대한 내적의 개념은 유클리드 기하학에 속한다는 것을 말해 준다. 마찬가지로 정리 3-6은 등장변환에 의하여 외적이 보존(부호는 제외하고)됨을 보여 준다. 실제로 유클리드 기하학은 등장변환에 의하여 보존되는 이런 개념에만 해당되는 것이다. 그러나 임의의 사상에 대하여는 이런 개념들이 보존되지 않는다.

예를 들어보자. $\mathbf{E}^3$의 곡선 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$에 대하여, 도함수

$$\alpha'=\left(\frac{d\alpha_1}{dt},\ \frac{d\alpha_2}{dt},\ \frac{d\alpha_3}{dt}\right),\quad \alpha''=\left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2},\ \frac{d^2\alpha_2}{dt^2},\ \frac{d^2\alpha_3}{dt^2}\right)$$

은 모두 닮은 것처럼 보인다. 제 1 장의 정리 7-8에 의하여 속도벡터는 임의의 사상 $F:\mathbf{E}^3\rightarrow\mathbf{E}^3$에 의하여 보존된다는 사실을 알았다. 즉 $\beta=F(\alpha)$라 하면 $\beta'=F_*(\alpha')$이다. 그러나 임의의 사상에 대하여 가속도벡터는 보존되지 않는다는 사실도 알 수 있다. 예를 들어 $\alpha(t)=(t,\ 0,\ 0)$이고 $F=(x^2,\ y,\ z)$라 하면 $\alpha''=0$이므로 $F_*(\alpha'')=0$이다. 그러나 $\beta=F(\alpha)$라 하면 $\beta(t)=(t^2,\ 0,\ 0)$이므로 $\beta''=2U_1$이다. 그러므로 이 경우에 $\beta=F(\alpha)$이지만 $\beta''\neq F_*(\alpha'')$이다. 그렇지만 가속도는 등장변환에 의하여 보존된다는 중요한 성질이 있다. 이 절에서는 제 2 장에서 소개한 이와 같은 개념을 조사하고 그들이 등장변환에 의하여 보존된다는 것을 증명한다.

제 2 장의 정의 2-3에서 소개한 곡선에 대한 벡터장에 관한 내용을 상

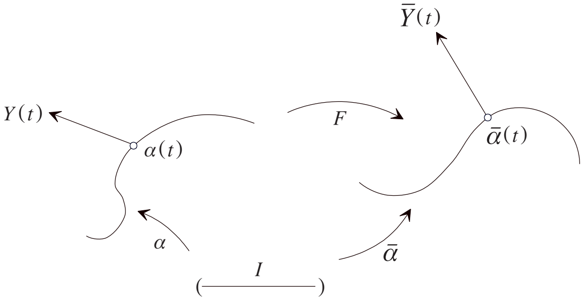


그림 3-6

기해 보자. 만약 Y를 곡선 $\alpha : I \to \mathbf{E}^3$ 위의 벡터장이라 하고 $F : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$를 임의의 사상이라 하면 $\bar{Y} = F_*(Y)$는 상곡선 $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ 위에서 벡터장이다. 실제로 I에 속한 t에 대하여 $Y(t)$는 점 $\alpha(t)$에서 $\mathbf{E}^3$의 접벡터이다. 그러나 $\bar{Y}(t) = F_*(Y(t))$는 점 $F(\alpha(t)) = \bar{\alpha}(t)$에서 $\mathbf{E}^3$의 접벡터이다. 이 관계가 그림 3-6에서 설명되어 있다. 등장변환은 이런 벡터장의 도함수를 보존한다.

정리 4-1

Y를 $\mathbf{E}^3$의 곡선 α 위에서의 벡터장이라 하고 F를 등장변환이라 하면, $\bar{Y} = F_*(Y)$는 $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ 위에서의 벡터장이고, 관계식

$$\bar{Y}' = F_*(Y')$$

를 만족한다.

증명 $F_*(F')$와 $\bar{Y}'$를 계산하기 위하여 Y를 유클리드 좌표함수로 표시하자. 즉

$$Y = \sum y_j U_j$$

라 하면

$$Y' = \sum \left(\frac{dy_j}{dt}\right) U_j$$

이므로, 정리 2-1에 의하여 $F_*(Y')$를 구할 수 있다.

$$F_*(Y') = \sum c_{ij}\left(\frac{dy_j}{dt}\right)\bar{U}_i$$

한편

$$\bar{Y} = F_*(Y) = \sum c_{ij} y_j \bar{U}_i$$

이다. 그런데 상수 c_{ij}는 F의 직교부분 C의 행렬의 원소이므로

$$\bar{Y}' = \sum \frac{d}{dt}(c_{ij}y_j)\bar{U}_i = \sum c_{ij}\left(\frac{dy_j}{dt}\right)\bar{U}_i$$

이다. 그러므로 $\bar{Y}' = F_*(Y')$이 성립한다. ■

등장변환은 가속도 벡터를 보존한다. 즉 $\bar{\alpha} = F(\alpha)$이고 F가 등장변환이면 $\bar{\alpha}'' = \bar{Y}' = F_*(Y') = F_*(\alpha'')$이다. 이것은 정리 4-1로부터 직접 나온다. 왜냐하면 만약 $Y = \alpha'$라면 제 1 장의 정리 7-8에 의하여 $\bar{Y} = \bar{\alpha}'$이므로

$$\bar{\alpha}'' = \bar{Y}' = F_*(Y') = F_*(\alpha'')$$

이기 때문이다.

이제 곡선의 프레네 체계가 등장변환에 의하여 보존됨을 증명해 보자. 이것은 등장변환이 향을 보존할 때 어떤 현상이 나타나는가를 말해 준다.

정리 4-2 등장변환과 프레네 체계

β를 곡률이 양수인 $\mathbf{E}^3$의 단위속도곡선이라 하고, $\bar{\beta} = F(\beta)$를 등장변환 F에 의한 β의 상곡선(image curve)이라 하면

$$\bar{\kappa} = \kappa, \qquad \bar{\tau} = (\operatorname{sgn} F)\tau,$$
$$\bar{T} = F_*(T), \quad \bar{N} = F_*(N), \qquad \bar{B} = (\operatorname{sgn} F)F_*(B)$$

이 성립한다. 단 $\operatorname{sgn} F = \pm 1$은 등장변환 F의 부호이다.

증명 제1장 정리 7-8로 부터, $\|\bar{\beta}'\|=\|F_*(\beta')\|=\|\beta'\|=1$이 성립하므로 $\bar{\beta}$는 단위속도곡선이다. 이제 β와 $\bar{\beta}$에 제2장 3절의 정의를 응용하면

$$\bar{T}=\bar{\beta}'=F_*(\beta')=F_*(T)$$

이다. F_*는 가속도와 노름을 보존하므로, 곡률의 정의로부터

$$\bar{\kappa}=\|\bar{\beta}''\|=\|F_*(\beta'')\|=\|\beta''\|=\kappa$$

를 얻는다. $\kappa>0$이고 $\bar{\kappa}=\kappa$이므로 $\bar{\kappa}>0$을 이용하면 프레네 틀에 대한 관계식을 구할 수 있다. 그러므로 $N=\dfrac{\beta''}{\kappa}$와 앞의 결과를 이용하면

$$\bar{N}=\frac{\bar{\beta}''}{\bar{\kappa}}=\frac{F_*(\beta'')}{\kappa}=F_*\left(\frac{\beta''}{\kappa}\right)=F_*(N)$$

을 얻고, 정리 3-6을 이용하면

$$\bar{B}=\bar{T}\times\bar{N}=F_*(T)\times F_*(N)=(\operatorname{sgn} F)F_*(T\times N)=(\operatorname{sgn} F)F_*(B)$$

를 얻을 수 있다.

이제 비꼬임률 τ에 대한 관계식은 $\tau=-B'\cdot N=B\cdot N'$로부터 구할 수 있다. 즉 B와 N에 대한 위의 결과들을 이용하면 된다.

$$\begin{aligned}\bar{\tau}&=\bar{B}\cdot\bar{N}'=(\operatorname{sgn} F)F_*(B)\cdot F_*(N')\\&=(\operatorname{sgn} F)(B\cdot N')=(\operatorname{sgn} F)\tau.\end{aligned}$$ ■

위의 정리에서 τ에 대한 sgn F, 즉 τ에 대한 부호는 그 곡선의 비꼬임의 향을 측정하는 것이다. 만약 F가 향을 반대로 바꾸는 변환이면, 공식 $\bar{\tau}=-\tau$는 곡선 $F(\beta)$의 비꼬임이 β 자신의 비꼬임과 반대로 되는 것을 의미한다. 정리 4-2를 확인시켜 주는 예를 보자.

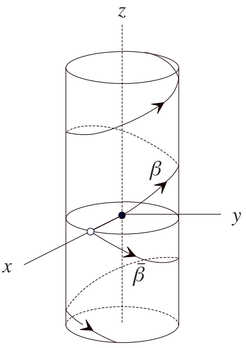


그림 3-7

예제 4-3

단위속도나선

$$\beta(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ \frac{s}{c}\right)$$

는 제 2 장의 예제 3-3의 결과부터 $a=b=1$, $c=\sqrt{2}$인 경우이므로 $\kappa=\tau=\frac{1}{2}$이다. 이제 R를 xy-평면에 대한 반사변환이라 하면 R는 등장변환이므로 $R(x,\ y,\ z)=(x,\ y,\ -z)$이다. 따라서 상곡선 $\bar{\beta}=R(\beta)$는 β의 거울상

$$\bar{\beta}(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ -\frac{s}{c}\right)$$

이다. 그림 3-7에서 보듯이 β와 $\bar{\beta}$는 반대방향으로 꼬여 있다. β가 오른손방향이면 $\bar{\beta}$는 왼손방향이다(실제로 β는 위로 감아올라가고 있고 $\bar{\beta}$는 내려가고 있다). 결국 반사변환 R은 향을 반대로 한다. 그러므로 위 정리 4-2로부터 $\bar{\kappa}=\kappa=\frac{1}{2}$이고 $\bar{\tau}=-\tau=-\frac{1}{2}$이다. $\bar{\beta}$는 제 2 장의 예제 3-3에서 $a=1$, $b=-1$인 경우이며, 이것은 일반공식을 사용해도 쉽게 계산할 수 있다. □

문제 3-4

1 $F=TC$를 $\mathbf{E}^3$의 등장변환, β를 $\mathbf{E}^3$의 단위속도곡선이라 하자. 다음을 증명하여라.
(1) β가 주면나선이면 $F(\beta)$도 주면나선이다.
(2) β의 구면상을 $\bar{\beta}$라 하면 $C(\bar{\beta})$는 $F(\beta)$의 구면상이다.

2 나선 $\alpha(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 2t)$ 위의 벡터장을 $Y=(t,\ 1-t^2,\ 1+t^2)$이라 하고, C를 직교변환

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2이라 하자. 이때 $\bar{\alpha}=C(\alpha)$와 $\bar{Y}=C_*(Y)$를 구하고

$$C_*(Y')=\bar{Y}',\quad C_*(\alpha'')=\bar{\alpha}'',\quad Y'\cdot\alpha''=\bar{Y}'\cdot\alpha''$$

이 성립함을 증명하여라.

3 꼭지점이 다음과 같은 $\mathbf{E}^2$의 두 삼각형

$$\triangle_1 : (3,\ 1),\ (7,\ 1),\ (7,\ 4), \qquad \triangle_2 : (2,\ 0),\ (2,\ 5),\ \left(-\frac{2}{5},\ \frac{16}{5}\right)$$

을 스케치하여라. 그리고 $\triangle_1$을 $\triangle_2$로 보내는 등장변환 F에 의하여 이 두 삼각형이 합동임을 보여라.

4 $F : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$은 F_*가 내적을 보존하는 사상이라 하면, F는 등장변환임을 증명하여라.

5 F를 $\mathbf{E}^3$의 등장변환이라 하자. 각 벡터장 V에 대하여 $F_*(V(\mathbf{p}))=\bar{V}(F(\mathbf{p}))$를 만족하는 벡터장을 $\bar{V}$라 하면 등장변환 F는 공변도함수를 보존함을 증명하여라. ($\overline{\nabla_V W}=\nabla_{\bar{V}}\bar{W}$를 보이면 된다.)

3-5 곡선의 합동

$\mathbf{E}^3$의 곡선에 대한 합동(congruence)의 일반 개념은 등장변환에 의하여 정의할 수 있다. 이에 관한 내용을 자세하게 조사하여 보자.

정의 5-1

두 곡선 $\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^3$이 **합동**이라 함은 $\beta = F(\alpha)$, 즉 모든 $t \in I$에 대하여 $\beta(t) = F(\alpha(t))$를 만족하는 등장변환 F가 존재하는 것이다.

직관적으로 말하면, 합동인 곡선은 공간에서 위치를 제외하고는 모양이 같다고 말할 수 있다. 그 곡선들은 같은 모양의 경로(route)를 따라서 같은 속도로 나아가고 있음을 나타낸다. 예를 들어보자.

나선(helix) $\alpha(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$가 z축으로 감아올라가는 것과 똑같은 방법으로 나선 $\beta(t) = (t, \cos t, \sin t)$도 x축을 감아올라간다. 결국 F를

$$F(p_1,\ p_2,\ p_3) = (p_3,\ p_1,\ p_2)$$

를 만족하는 등장변환이라 하면 $F(\alpha) = \beta$이다. 그러므로 두 나선은 합동이다.

곡선 α와 β가 합동인가를 결정하기 위하여 α를 β로 보내는 등장변환이 존재하는가를 무한히 많은 등장변환을 대상으로 시도하기란 사실상 불가능하다. 그러므로 두 단위속도곡선이 모양에 대한 같은 특징이 있으면, 두 곡선은 합동이라고 한다. 우리가 곡선의 모양에 관한 특징이라고 아무 의심 없이 수용할 수 있는 것은 곡률과 비꼬임률에 의한 것이다.

합동인 곡선은 평행이동(translations)에 의하여 겹쳐질 수 있다. 그러므로 두 곡선 $\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^3$가 평행일 필요충분조건은 모든 $s \in I$에 대하여

$\beta(s)=\alpha(s)+\mathbf{p}$를 만족하는 점 $\mathbf{p}$가 존재하는 것이다.

정리 5-2	합동정리

두 곡선 $\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^3$의 각각의 속도벡터 $\alpha'(s)$와 $\beta'(s)$가 평행이면 α와 β는 평행이다. 특히 α와 β가 평행이고 어느 한 점 $s_0 \in I$에서 $\alpha(s_0)=\beta(s_0)$이면 $\alpha=\beta$이다.

증명 정의에 따라 $\alpha'(s)$와 $\beta'(s)$가 평행이면 α와 β는 같은 유클리드 좌표를 가지므로

$$\frac{d\alpha_i}{ds}(s)=\frac{d\beta_i}{ds}(s), \quad (1 \le i \le 3)$$

이다. 단 α_i와 β_i는 각각 α와 β의 유클리드 좌표이다. 그런데 위 방정식은 $\beta_i=\alpha_i+p_i$ (p_i: 상수)를 뜻하므로 $\beta=\alpha+\mathbf{p}$이다. 더욱이 $\alpha(s_0)=\beta(s_0)$이면 $\mathbf{p}=\mathbf{0}$이 되어 $\alpha=\beta$가 된다. ■

정리 5-3	두 곡선의 합동조건

단위속도곡선 $\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^3$가 $\kappa_\alpha=\kappa_\beta$이고 $\tau_\alpha=\pm\tau_\beta$이면 α와 β는 합동이다.

증명 다음과 같이 두 단계로 증명하자.

(1). α와 합동인 곡선 $F(\alpha)$를 도입한 후

(2). $F(\alpha)=\beta$임을 증명한다.

(1) 단계: 구간 I에 속한 수 s를 고정한다. 여기서는 $s=0$이라 하자. $\tau_\alpha=\tau_\beta$인 경우 점 $\alpha(0)$에서 α의 플레네틀 $T_\alpha(0)$, $N_\alpha(0)$, $B_\alpha(0)$을 점 $\beta(0)$에서 β의 프레네 틀 $T(0)$, $N(0)$, $B(0)$으로 옮기

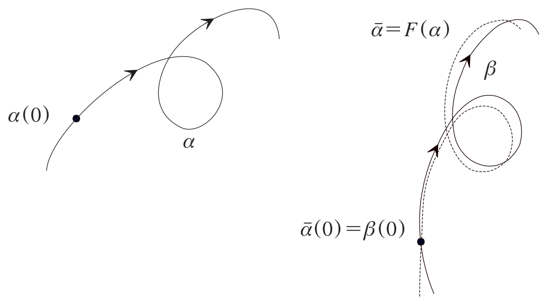


그림 3-8

는 향을 보존하는 등장변환을 F라 하자(이와 같은 F의 존재성은 정리 2-3에 의하여 보장된다). $\bar{\kappa}$, $\bar{\tau}$, $\bar{T}$, $\bar{N}$, $\bar{B}$를 $\bar{\alpha}=F(\alpha)$의 프레네 체계라 하면 정리 4-2와 위의 내용으로부터

$$\begin{aligned}&\bar{\alpha}(0)=\beta(0), \quad \bar{\kappa}=\kappa_\beta, \qquad \bar{\tau}=\tau_\beta\\ &\bar{T}(0)=T(0), \quad \bar{N}(0)=N(0), \quad \bar{B}(0)=B(0)\end{aligned} \tag{$*$}$$

을 얻는다. 한편 $\tau_\alpha=-\tau_\beta$인 경우에는 $\alpha(0)$에서 틀 $T_\alpha(0), N_\alpha(0), B_\alpha(0)$을 $\beta(0)$에서의 틀 $T(0)$, $N(0)$, $-B(0)$으로 옮기는 향을 바꾸는 등장변환 F를 선택하면 된다(프레네 틀은 향을 보존하므로 $T_\alpha(0)$, $N_\alpha(0)$, $-B_\alpha(0)$은 프레네 틀이 아닌 음의 향을 갖는 틀이다). 정리 4-2에 의하여 방정식 $(*)$은 $\bar{\alpha}=F(\alpha)$에 대하여도 성립함을 알 수 있다. 왜냐하면 문제가 되는 $\bar{\tau}$와 $\bar{B}$에 대하여 다음 관계가 성립하기 때문이다.

$$\begin{aligned}\bar{\tau}&=(\operatorname{sgn} F)\tau_\alpha=-(-\tau_\beta)=\tau_\beta\\ \bar{B}(0)&=(\operatorname{sgn} F)F_*(B_\alpha(0))\\ &=-F_*(B_\alpha(0))=-(-B(0))=B(0)\end{aligned}$$

(2) 단계: $F(\alpha)=\beta$를 증명하려면 $\bar{\alpha}(0)=\beta(0)$이므로 두 곡선 $\bar{\alpha}=F(\alpha)$와 β의 프레네 단위벡터가 대응하는 각 점에서 서로 평행함을 보이면 된다(정리 5-2). 이제 구간 I에서 실가함수

$$f=\bar{T}\cdot T+\bar{N}\cdot N+\bar{B}\cdot B$$

를 도입하자. 이때 모든 $s\in I$에 대하여 $f(s)=3$임을 증명하면 된다.

$$f'=\bar{T}'\cdot T+\bar{T}\cdot T'+\bar{N}'\cdot N+\bar{N}\cdot N'+\bar{B}'\cdot B+\bar{B}\cdot B'$$

이므로, $\bar{\alpha}$와 β에 대한 프레네 공식을 대입하면

$$f'=0 \quad \text{또는} \quad f=\text{상수}$$

를 얻는다. 그런데 식 $(*)$에 의하여

$$f(0)=\bar{T}(0)\cdot T(0)+\bar{N}(0)\cdot N(0)+\bar{B}(0)\cdot B(0)=3$$

이다. 한편

$$\bar{T}\cdot T\leq 1, \quad \bar{N}\cdot N\leq 1, \quad \bar{B}\cdot B\leq 1$$

이므로

$$\bar{T}\cdot T=\bar{N}\cdot N=\bar{B}\cdot B=1$$

이어야 한다. 따라서 $\bar{T}$, $\bar{N}$, $\bar{B}$는 각각 T, N, B와 평행이다. ■

이제 합동인 두 곡선 α, β에 대하여 α를 β로 옮기는 등장변환을 어떻게 확실하게 계산할 수 있는가 예를 들어 조사해 보자.

예제 5-4

$$\alpha(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ \frac{s}{c}\right)$$

$$\beta(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ -\frac{s}{c}\right), \quad \text{단 } c=\sqrt{2}$$

으로 표시되는 두 개의 단위속도곡선 $\alpha, \beta : I\rightarrow \mathbf{E}^3$을 생각해 보자. 분명히 이 곡선은 반사에 의한 합동곡선이다(예제 4-3의 나선). 그러나 요구된 등장변환을 계산하는 일반적인 방법을 기술하기 위하여 이 사실을 무시하자.

제 2 장의 예제 3-3의 결과에 의하여 α와 β의 곡률과 비꼬임률은 각각

$$\kappa_\alpha=\frac{1}{2}=\kappa_\beta, \quad \tau_\alpha=\frac{1}{2}=-\tau_\beta$$

임을 안다. 따라서 정리 5-3에 의하여 향을 바꾸는 등장변환 F에 의하여 α와 β는 합동임을 알 수 있다. 이제 F는 프레네 틀

$$\begin{aligned} T_\alpha(0)&=(0,\ a,\ a)\\ N_\alpha(0)&=(-1,\ 0,\ 0)\\ B_\alpha(0)&=(0,\ -a,\ a), \quad \text{단 } a=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

을 다른 하나의 틀

$$\begin{aligned} T_\beta(0)&=(0,\ a,\ -a)\\ N_\beta(0)&=(-1,\ 0,\ 0)\\ -B_\beta(0)&=(0,\ -a,\ -a), \quad \text{단 } a=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

로 옮겨야만 한다(위의 결과는 제 2 장의 예제 3-3으로부터 쉽게 얻을 수 있다).

이제 $\alpha(s)$와 $R(\alpha(s))=\beta(s)$ 사이의 관계를 수식으로 조사해 보자. 주어진 나선

$$\alpha(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ \frac{s}{c}\right), \quad c=\sqrt{2}$$

로부터 프레네 체계는 쉽게 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} T(s)&=\left(-\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{1}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{1}{c}\right)\\ N(s)&=\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)\\ B(s)&=\left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{1}{c}\right)\\ \kappa(s)&=\tau(s)=\frac{1}{c^2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

한편, xy-평면을 거울로 생각했을 때 반사변환 R에 의한 $\alpha(s)$의 상

$$\beta(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ -\frac{s}{c}\right),\ c=\sqrt{2}$$

에 대한 프레네 체계 $\bar{T}(s)$, $\bar{N}(s)$, $\bar{B}(s)$, $\bar{\kappa}(s)$, $\bar{\tau}(s)$는 각각

$$\bar{T}(s)=\left(-\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{1}{c}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{1}{c}\right)$$

$$\bar{N}(s)=\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$-\bar{B}(s)=\left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{1}{c}\right)$$

$$\bar{\kappa}(s)=\frac{1}{2}=-\bar{\tau}(s)$$

이므로, 반사사상 R는 향을 반대로 바꾸는 등장변환임을 알 수 있다.

한편 A와 B를 두 개의 틀의 태도행렬이라 할 때, 등장변환 F의 직교부분 C는 ${}^tBA$이므로

$$C={}^tBA=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -a \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이다. 그런데 두 틀은 같은 적용점 $\alpha(0)=\beta(0)=(1,\ 0,\ 0)$을 가지고 있으므로 C는 이 점을 움직이지 않는다. 따라서 F의 이동부분 T는 바로 항등사상이다. 따라서 반사변환 $F=C$는 α를 β로 옮겨 준다. 다시 말하면 등장변환 $F=C$는 α 위의 점 $\alpha(s)$에서의 틀 T_α, N_α, B_α를 점 $F(\alpha(s))=\beta(s)$에서의 틀 T_β, N_β, B_β로 옮겨 준다.

유클리드 기하의 관점에서 보면 $\mathbf{E}^3$의 두 곡선이 등장변환에 의하여만 다르다면 두 곡선은 같은 것이다. 예를 들어 나선은 어떤 곡선인가?

제 2 장의 예제 3-3에 의하면 z축을 중심으로 감아가는 곡선뿐만 아니라 임의의 곡선은 특별한 나선 중의 어느 하나와 합동이 된다는 것이다. 일반적인 공식을 나열하기보다는 가장 특징 있는 것 하나를 소개해 보자.

정리 5-5 나선이 될 조건

α를 $\mathbf{E}^3$의 단위속도곡선이라 하자. α가 나선일 필요충분조건은 α의 곡률과 비꼬임률 모두가 0이 아닌 상수가 되는 것이다.

증명 나선(제 2 장의 예제 3-3)

$$\beta_{a,b}=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right),\ a>0,\ b\neq0,\ c=\sqrt{a^2+b^2}$$

을 도입하자. 만약 곡선 α와 $\beta_{a,b}$가 합동이면 α를 $\beta_{a,b}$로 옮겨 주는 등장변환은 향을 보존한다고 가정할 수 있다. 그때 α의 곡률과 비꼬임률은 $\beta_{a,b}$의 곡률 κ와 비꼬임률 τ와 같아야 한다. 그런데 곡선 α로부터

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2},\quad \tau=\frac{b}{a^2+b^2} \tag{$*$}$$

를 얻을 수 있으므로 α가 나선이면 분명히 κ와 τ는 0이 아닌 상수이다. 역으로 곡선 α가 식 $(*)$와 같은 0이 아닌 상수 κ와 τ를 갖는다고 가정하자. 이때 관계식 $(*)$을 a와 b에 관하여 풀어 쓰면

$$a=\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2},\quad b=\frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

이므로

$$\beta_{a,b}=\left(\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\cos\frac{s}{c},\ \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\sin\frac{s}{c},\ \frac{\tau s}{(\kappa^2+\tau^2)c}\right)$$

이다. 그런데 계산에 의하여 $\beta_{a,b}$의 곡률과 비꼬임률은 각각 κ, τ이므로 $\beta_{a,b}$와 합동이다. 따라서 α는 나선이어야 한다. ■

정리 5-6	두 곡선의 합동

$\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^3$을 임의의 속도곡선이라 하자. 만약

$$v_\alpha = v_\beta > 0, \quad \kappa_\alpha = \kappa_\beta > 0, \quad \tau_\alpha = \pm\tau_\beta$$

라 하면, 곡선 α와 β는 합동이다.

증명 $\bar{\alpha}$와 $\bar{\beta}$를 $t=0$에서 기준을 둔 α, β의 재매개변수화된 단위속도곡선이라 하자. α와 β는 같은 속도함수를 가지므로 역시 같은 호의 길이(호장)함수 $s=s(t)$를 갖고 역함수 $t=t(s)$를 갖는다. 그런데

$$\kappa_\alpha = \kappa_\beta \text{이고 } \tau_\alpha = \pm\tau_\beta$$

이므로, 제 2 장 2-4절의 곡률과 비꼬임률의 정의에 따라

$$\kappa_{\bar{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(t(s)) = \kappa_\beta(t(s)) = \kappa_{\bar{\beta}}(s)$$
$$\tau_{\bar{\alpha}}(s) = \tau_\alpha(t(s)) = \pm\tau_\beta(t(s)) = \pm\tau_{\bar{\beta}}(s)$$

를 얻는다. 따라서 합동정리 5-3에 의하여 $\bar{\alpha}$와 $\bar{\beta}$는 합동이다. 말하자면 등장변환 F에 의하여 $F(\bar{\alpha}) = \bar{\beta}$이다. 그런데

$$F(\alpha(t)) = F(\bar{\alpha}(s(t))) = \bar{\beta}(s(t)) = \beta(t)$$

이므로 등장변환 F는 α를 β로 옮긴다. 즉 $F(\alpha) = \beta$이다. ■

이제까지 우리가 제시한 곡선론은 양의 곡률을 갖는 정칙곡선에 한하여 응용하기로 하자. 왜냐하면 이런 곡선에 한하여 프레네 틀장을 정의하는 것이 일반적으로 가능했기 때문이다. 그렇지만 $\mathbf{E}^3$에서 완전한 임의의 곡선 α는 α 위에서 임의의 틀장, 즉 각 점에서 수직인 α 위의 세 단위벡터 E_1, E_2, E_3에 의한 방법으로 연구할 수 있다. 예를 들어 합동정리 5-3은 임의의 곡선으로 쉽게 확장할 수 있다. 이것에 관한 정리를 살펴보자.

정리 5-7	두 곡선의 합동

$\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^3$을 임의의 곡선이라 하자. E_1, E_2, E_3와 F_1, F_2, F_3를 각각 α와 β의 틀장이라 할 때

(1) $\alpha' \cdot E_i = \beta' \cdot F_i \quad (1 \le i \le 3)$

(2) $E_i' \cdot E_j = F_i' \cdot F_j \ (1 \le i, j \le 3)$

이면 α와 β는 합동이다.

증명 구간 I에 있는 하나의 수를 0으로 고정하자. 이 경우 틀

$$E_1(0),\ E_2(0),\ E_3(0)\text{을 } F_1(0),\ F_2(0),\ F_3(0)$$

으로 보내는 등장변환을 $\mathbf{F}$라 하자. $\bar{\alpha} = \mathbf{F}(\alpha)$라 할 때 $\bar{\alpha}(0) = F(\alpha(0)) = \beta(0)$이라 하면, $\mathbf{F}_*$는 내적을 보존하므로 $\bar{E}_i = \mathbf{F}_*(E_i)$ $(1 \le i \le 3)$은 $\bar{\alpha} = \mathbf{F}(\alpha)$ 위에서 하나의 틀장을 이룬다. $\mathbf{F}_*$는 속도벡터와 벡터장의 도함수를 보존하므로 조건 (1), (2)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}(0) = F(\alpha(0)) = \beta(0), \quad \bar{\alpha}' \cdot \bar{E}_i = \beta' \cdot F_i \\ &\bar{E}_i(0) = F_i(0), \quad \bar{E}_i' \cdot \bar{E}_j = F_i' \cdot F_j \quad (1 \le i, j \le 3) \end{aligned} \qquad (**)$$

식 $(**)$의 마지막 식으로부터

$$\bar{E}_i' = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{E}_j, \quad \bar{F}_i' = \sum_{i,j} a_{ij} F_j$$

를 얻을 수 있다(같은 계수 a_{ij}로 표시할 수 있음에 유의하라). 한편

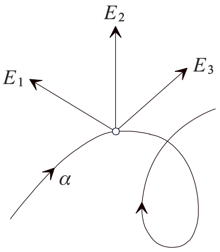


그림 3-9

$\bar{E}_i \cdot \bar{E}_j = \delta_{ij}$를 미분함으로써

$$a_{ij} + a_{ji} = 0$$

을 얻는다. 이제 $f = \sum \bar{E}_i \cdot F_i$라 할 때 $f = 3$임을 보이자. f를 미분하고 $\bar{E}_i{}'$와 F_i를 대입하면

$$\begin{aligned} f' = \sum_i (\bar{E}_i{}' \cdot F_i + \bar{E}_i \cdot F_i{}') &= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \bar{E}_j \cdot F_i + \sum_j a_{ij} F_j \cdot \bar{E}_i \right) \\ &= \sum_{i,j} (a_{ij} + a_{ji}) \bar{E}_j \cdot F_i = 0 \end{aligned}$$

이므로 $f =$(상수)이다. 그런데 식 $(**)$을 이용하면

$$f(0) = \sum \bar{E}_i(0) \cdot F_i(0) = 3$$

이므로 I의 모든 값에 대하여 $f = 3$이다. 그러므로

$$\bar{E}_i \cdot F_i = 1, \quad \text{또는} \quad \bar{E}_i = F_i \quad (\text{평행성})$$

가 성립한다. 따라서

$$\bar{\alpha}' = \sum (\bar{\alpha}' \cdot \bar{E}_i) \bar{E}_i = \sum (\bar{\alpha}' \cdot \bar{E}_i) F_i$$

이므로, 식 $(**)$에 의하여 $\bar{\alpha}'$와 $\beta' = \sum (\beta' \cdot F_i) F_i$는 평행이다. 그런데 $\bar{\alpha}(0) = \beta(0)$이므로 정리 5-2에 의하여

$$F(\alpha) = \bar{\alpha} = \beta$$

를 얻을 수 있다. 따라서 α와 β는 합동이다. ■

제 6 장 6-8절에서는 이 내용을 일반화하여 곡선의 합동에 관하여 자세하게 공부할 것이다.

문제 3-5

□ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : I \to \mathbf{E}^3$을 주어진 곡선이라 할 때, $\beta : I \to \mathbf{E}^3$가 α와 합동일 필요

충분조건은 β가

$$\beta(t)=\mathbf{p}+\alpha_1(t)\mathbf{e}_1+\alpha_2(t)\mathbf{e}_2+\alpha_3(t)\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$$

로 표현되는 것이다. 증명하여라.

$\boxed{2}$ $\alpha(t)=(3t-t^3,\ 3t^2,\ 3t+t^3)$이라 할 때 $F(\alpha)=r$를 만족하는 $r(t)=(at,\ bt^2,\ ct^3)$ 형식의 곡선과 등장변환 F를 구하여라(제 2 장의 예제 4-4).

$\boxed{3}$ 쌍대형식 θ_i와 접속형식 ω_{ij}를 갖는 $\mathbf{E}^3$의 벡터장을 $E_1,\ E_2,\ E_3$라 하자. 만약 $\theta_i(\alpha')=\theta_i(\beta')$이고 $\omega_{ij}(\alpha')=\omega_{ij}(\beta')$이면 두 곡선 $\alpha,\ \beta : I\to\mathbf{E}^3$는 합동임을 증명하여라.

$\boxed{4}$ 곡선 $\beta(t)=(1+\sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}\,t-\sin t)$의 곡률과 비꼬임률을 계산함으로써 이 곡선이 나선임을 보여라. 그리고 $F(\alpha)=\beta$를 만족하는 $(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$형식의 곡선 a와 등장변환 F를 구하여라.

$\boxed{5}$ $\alpha,\ \beta : I\to\mathbf{E}^3$을 $\kappa>0$인 합동곡선이라 하면 $F(\alpha)=\beta$인 등장변환 F가 하나 존재함을 증명하여라.

$\boxed{6}$ 포물선 $\alpha(t)=(\sqrt{2}\,t,\ t^2,\ 0)$을 포물선 $\beta(t)=(-t,\ t,\ t^2)$으로 보내는 등장변환을 구하여라.

$\boxed{7}$ β를 $\mathbf{E}^3$의 단위속도곡선이라 하면, β의 모든 단위속도 재매개변수표시 $\bar{\beta}$는

$$\bar{\beta}(s)=\beta(\pm s+s_0)$$

의 형식이다. 만약 β와 $\bar{\beta}$가 합동이면 β와 $\bar{\beta}$의 공통경로에서 대칭임을 표시한다. 이때 나선 경로는 대칭임을 보여라. 명확히 말하면 예제 3-3에서 $F(\beta)=\bar{\beta}$인 등장변환 $F=TC$를 확실히 구함으로써 $\beta(s)$는 모든 단위속도 재매개변수표시 $\bar{\beta}$와 합동이 됨을 보여라.

$\boxed{8}$ 구간 I에서 주어진 미분가능 함수 κ가 있을 때, κ가 α의 곡률함수가 되는 $\mathbf{E}^2$의 단위속도곡선 α가 존재함을 증명하여라.

$\boxed{9}$ 곡률함수가 각각

(1) $\kappa(s)=\dfrac{1}{1+s^2}$ (2) $\kappa(s)=\dfrac{1}{s}\ (s>0)$

인 평면곡선을 구하여라. 단 s는 곡선의 호의 길이함수이다.

$\boxed{10}$ 평면단위속도곡선 α와 β가 합동일 필요충분조건은 $\kappa_\alpha=\pm\kappa_\beta$임을 증명하여라.