6 곡면의 대역적 이론

6.1 곡면의 대역적 정리

곡면 M의 모양연산자 S는 $\mathbb{E}^3$ 상의 곡선에 있어서 곡률 κ와 열률 τ의 역할과 비슷하다. 이 장에서는 곡면 M이 연결(connected)이라고 가정하자. 지금부터 연결곡면 M의 모양연산자 S의 값에 따라 특정지어지는 몇 가지 곡면의 대역적 정리를 소개하고자 한다.

정리 6.1 연결곡면 M의 모양연산자가 항등적으로 0이면, M은 $\mathbb{E}^3$에 놓인 평면이다.

[증명] 모양연산자 S가 항등적으로 0이면 곡면 M의 법벡터장 $\mathbf{U}$에 대해 $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{U} = \mathbf{0}$ (, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M)$)이므로 $\mathbf{U}$는 평행하다. M 위의 한 점 $\mathbf{p}$를 고정하고, M이 $\mathbf{p}$를 지나고 $\mathbf{U}$에 직교하는 평면에 놓여 있음을 보이자. 만약 $\mathbf{q}$를 M 위의 임의의 한 점이라 하면, M은 연결곡면이므로 $\alpha(0) = \mathbf{p}$로부터 $\alpha(1) = \mathbf{q}$에 이르는 M에 속하는 곡선 $\alpha(t)$가 존재한다. 함수

$$f(t) =< \alpha(t) - \mathbf{p},\ \mathbf{U} >$$

를 미분하면

$$f'(t) =< \alpha'(t),\ \mathbf{U} >= 0$$

가 성립하므로 $f(t)$는 상수이고, 한편 $f(0) = 0$이므로 $f(t)$는 모든 t에 대하여 $f(t) = 0$이다. 특히, $f(1) =< \mathbf{q} - \mathbf{p},\ \mathbf{U} >= 0$이므로 $\mathbf{q}$는 주어진 평면안에 있

다. $\mathbf{q}$는 M의 임의의 점이므로 M은 $\mathbf{U}$에 수직한 평면에 놓인다. ▣

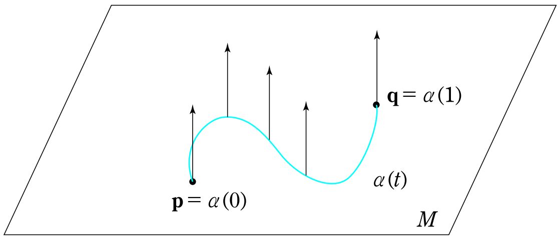


그림 6.1

[참고] 위 정리 및 증명을 곡선론의 정리 2.7과 비교해보면 매우 유사함을 알 수 있다.

정리 6.2 $M \subset \mathbb{E}^3$을 제점으로만 이루어진 곡면이라 하면, M의 Gauss곡률 K는 $K \geqq 0$인 상수이다.

[증명] $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$를 M안의 영역 W에서의 한 표준표구장이라 하자. M의 모든 점이 제점이므로 W위에서의 주곡률은 $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ (상수)이다. 따라서 $\mathbf{U}_1[\kappa] = \mathbf{U}_2[\kappa] = 0$이므로 영역 W위에서 $d\kappa = 0$이다. 그런데 $K = \kappa_1\kappa_2 = \kappa^2$이므로 $dK = 2\kappa d\kappa = 0$이다. M의 모든 점은 이런 영역안에 속하므로 M의 모든점에서 $dK = 0$이다. 따라서 K는 상수이고 $K = \kappa^2 \geq 0$이다. ▣

정리 6.3 $M \subset \mathbb{E}^3$이 모두 제점으로 되어있고 $K > 0$이면, M은 반경이 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$인 구면의 일부이다.

[증명] M의 한 점 $\mathbf{p}$를 택하여, $\mathbf{p}$에서 M의 단위법벡터 $\mathbf{U}(\mathbf{p})$를 설정하자. 먼저

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} + \frac{1}{\kappa(\mathbf{p})}\mathbf{U}(\mathbf{p})$$

가 M의 모든 점으로부터 같은 거리에 있음을 보이자. (여기서 $\kappa(\mathbf{p}) = \kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p})$는 점 $\mathbf{p}$에서의 주곡률이다.) $\mathbf{q}$를 M 위의 임의의 점이라 하고, α를 $\alpha(0) = \mathbf{p}$로부터 $\alpha(1) = \mathbf{q}$에 이르는 M 위의 호라 하자. $\mathbf{U}(\mathbf{p})$를 곡선 α 위의 단위법벡터장 $\mathbf{U}$로 확장하고, $\mathbb{E}^3$ 위의 곡선

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{\kappa}\mathbf{U}$$

를 생각하자. 여기서 주곡률함수 κ는 연속이라고 가정해도 좋다.
한편 $K = \kappa^2 =$ 이므로 κ도 상수이다. 따라서

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{\kappa}\mathbf{U}'$$

이다. 그런데 모든 점이 제점이므로, S는 κ의 스칼라배 (정리 5.9의 (1)참고)가 되어

$$\mathbf{U}' = -S(\alpha') = -\kappa\alpha'$$

이므로

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\alpha') = 0$$

이다. 결국 γ는 상수함수이며, 특히 $\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{U}(\mathbf{q})$이므로 M 위의 모든 점 $\mathbf{q}$에 대해 $\|\mathbf{q} - \mathbf{c}\| = \dfrac{1}{|\kappa|}$이다. 한편 $K = \kappa^2$이므로 $|\kappa| = \sqrt{K}$이다. 그러므로 M은 중심이 $\mathbf{c}$이고 반경이 $\frac{1}{\sqrt{K}}$인 구면에 포함된다. ▣

[참고] (1) 위 정리의 증명과정은 곡선론의 정리 2.8과 유사하다.
(2) $M \subset \mathbb{E}^3$이 제점만으로 이루어진 곡면일 필요충분조건은 평면이거나 구면의 일부분이다.

정의 6.1 곡면 M이 M에 속한 유한개의 고유조각사상들의 상에 의하여 덮혀질 때, M을 **compact 곡면**(*compact surface*)이라고 한다.

[참고] $M \subset \mathbb{E}^3$이 폐영역이고 유한이면, M은 *compact*이다.

정리 6.4 제점만으로 구성된 *compact*곡면 $M \subset \mathbb{E}^3$은 구면 전체이다.

[증명] $\mathbb{E}^3$의 *compact*곡면 M이 연결곡면 N에 포함되면 $M = N$ 임이 알려져 있는데(증명생략), 이로부터 위 참고 (2)에 의하면 M은 평면 또는 구면의 일부이어야 한다. 그런데 *compact*곡면 M은 경계를 갖지 않는 닫힌 영역이므로 M은 구면 전체이어야 한다. ▣

정리 6.5 모든 *compact*곡면 $M \subset \mathbb{E}^3$위에는 $K > 0$을 만족하는 점이 존재한다.

[증명] $f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|^2$을 만족하는 M 위의 실함수 f를 도입하자. 이것은 $\mathbf{p} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ 라 하면 $f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} {x_i}^2$이다. f는 연속이므로 *compact*인 M 위의 어떤 점 $\mathbf{m}$에서 f는 최대값을 갖는다. (왜냐하면, f를 *compact*곡면 M 위의 연속함수라 하면 f는 M의 어떤 점에서 최대값 (또는 최소값)을 갖는다는 최대·최소값의 정리 이용) f는 원점으로부터 M 위의 점에 이르는 거리의 제곱을 나타내므로, 원점에서 M에 이르는 최대거리는 $r = \|\mathbf{m}\| > 0$이다. 따라서 M은 점 $\mathbf{m}$에서 반경이 r인 구면 $S^2(r)$과 접하면서 $S^2(r)$의 안쪽에 위치한다. 한편, M은 $S^2(r)$보다 더 많이 구부러져 있고 $S^2(r)$의 Gauss곡률은 $\frac{1}{r^2}$이므로 $K(\mathbf{m}) \geqq \frac{1}{r^2} > 0$이다.

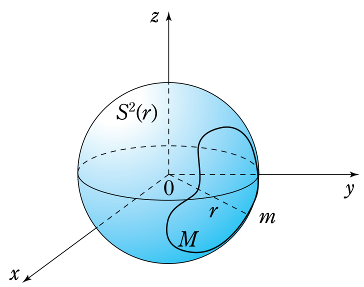


그림 6.2

이제 이 사실을 논리적으로 증명해 보기로 하자. f가 최대값을 갖는 점 $\mathbf{m}$에서 M에 접하는 단위접벡터를 $\mathbf{u}$라 하고, $\beta(0) = \mathbf{m}$, $\beta'(0) = \mathbf{u}$가 되는 M 위의 단위속력곡선 β를 택하자. 그러면 합성함수 $f(\beta)$는 $s = 0$에서 최대값을 갖는다. 따라서

$$\frac{d}{ds} f(\beta(s))(0) = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} f(\beta(s))(0) \leqq 0 \tag{6.1}$$

를 만족한다. 그러나 $f(\beta) =< \beta,\ \beta >$이므로

$$\frac{d}{ds} f(\beta) = 2 < \beta,\ \beta' >$$

이다. 그러므로 $s = 0$에서

$$\frac{d}{ds} f(\beta)(0) = 2 < \beta(0),\ \beta'(0) >= 2 < \mathbf{m}, \mathbf{u} >= 0$$

을 얻을 수 있다. 이것은 $\mathbf{u}$가 $\mathbf{m}$에서의 M의 임의의 단위접벡터이므로 $\mathbf{m}$은 벡터로서 점 $\mathbf{m}$에서 곡면 M에 수직임을 의미한다. 다시 미분하면

$$\frac{d^2(f\beta)}{ds^2} = 2 < \beta',\ \beta' > +2 < \beta,\ \beta'' >$$

이고 $s=0$에서 방정식 (6.1)의 두 번째 식을 이용하면

$$0 \geq <\mathbf{u},\ \mathbf{u}> + <\mathbf{m},\ \beta''(0)> = 1 + <\mathbf{m},\ \beta''(0)> \tag{6.2}$$

를 얻는다. 한편 $\dfrac{\mathbf{m}}{r}$은 $\mathbf{m}$에서 M의 단위법벡터이고, $\mathbf{u}$방향에 대한 점 $\mathbf{m}$에서 M의 법곡률 $\kappa_n(\mathbf{u})$는

$$\kappa_n(\mathbf{u}) = <S(\mathbf{u}),\ \mathbf{u}> = \left\langle \frac{\mathbf{m}}{r}, \beta'' \right\rangle$$

이다. 그런데 방정식 (6.2)로 부터 $<\mathbf{m},\ \beta''> \leqq -1$이므로 $\kappa_n(\mathbf{u}) \leqq -\dfrac{1}{r}$임을 알 수 있다. 특히 주곡률도 이 부등식을 만족해야 하므로 $\mathbf{m}$에서 M의 Gauss곡률은

$$K(\mathbf{m}) = \kappa_1(\mathbf{m})\kappa_2(\mathbf{m}) \geqq \left(-\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} > 0$$

이다. ▣

[참고] 위 정리의 대우로 부터 $K \leqq 0$인 $\mathbb{E}^3$의 *compact*곡면은 존재하지 않음을 알 수 있다.

정리 6.6 (**Hilbert 정리**)
곡면 $M \subset \mathbb{E}^3$ 위의 실함수 $k_1,\ k_2$에 대하여 한 점 $\mathbf{m}$에서 k_1이 극대값을, k_2가 극소값을 가지면 $k_1(\mathbf{m}) > k_2(\mathbf{m})$일 때, $K(m) \leq 0$이다.

[증명] 이 책의 내용의 범위를 벗어나므로 증명은 생략한다. ▣

[참고] 이 정리에 대한 예를 살펴보자. 윤환면의 안쪽 적도 또는 현수면의 가장 작은 원($x=0$) 위의 임의의 점에서 위의 조건들은 만족되며, 이 두 경우 모두 $K<0$이다.

정리 6.7 (**Liebmann 정리**)
상수인 Gauss곡률 K를 갖는 *compact*곡면 M은 반경이 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$인 구면이다.

[증명]

$$H^2 - K = \frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{4} \geqq 0$$

은 M위에서 연속인 함수이다. M은 *compact*이므로 함수 H^2-K는 M의 어떤 점 $\mathbf{m}$에서 최대값을 갖는다. 만약 $\mathbf{m}$에서 $H^2-K=0$이라 하면 H^2-K는 항

등적으로 0이고, 따라서 M의 모든점은 제점이므로 M은 반경이 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$인 구면 전체가 되어 정리는 성립한다. 지금부터 $\mathbf{m}$에서 $H^2 - K > 0$는 될 수 없음을 증명해 보자.

$H^2 - K > 0$이라 가정하면 $\mathbf{m}$은 제점이 아니므로 $\mathbf{m}$의 근방에서 $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$이 되도록 순서를 정하자 ($K > 0$이기 때문에 $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$이거나 $0 > \kappa_1 > \kappa_2$이어야 한다). 그런데 $H^2 - K = \dfrac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4}$는 $\mathbf{m}$에서 최대값을 가지므로 $\kappa_1 - \kappa_2$도 $\mathbf{m}$에서 최대값을 갖는다. 따라서 $K = \kappa_1\kappa_2$는 일정하므로 κ_1은 $\mathbf{m}$에서 극대값을 κ_2는 $\mathbf{m}$에서 극소값을 가져야 한다. 그리고 $\mathbf{m}$은 제점이 아니므로 Hilbert 정리에 의해서

$$K(\mathbf{m}) \leq 0$$

이다. 이것은 $K > 0$에 모순이므로 M 위의 모든 점은 항등적으로 $H^2 - K = 0$이어야 한다. ▣

[참고] Liebmann 정리는 *compact*라는 조건이 없으면 성립하지 않는다. 예를 들면, 일정한 곡률을 갖는 구면이 아닌 회전면은 $\mathbb{E}^3$내에 많이 존재한다.

연습문제 6.1

1. M이 평탄극소곡면(즉, $K = H = 0$)이면 M은 평면의 일부임을 보여라.

2. Gauss곡률이 양이고 평균곡률이 상수인 유향곡면은 구면임을 보여라.

3. 곡면 M의 주곡률이 상수이면, M은 평면, 구면 또는 원주면의 일부임을 보여라.

4. 제점이 존재하지 않는 영역에서는 각 점을 지나는 주곡선은 오직 두 개 존재하고, 이것들은 서로 직교함을 보여라.

5. 정리 6.6을 증명하여라.

6. 정리 6.7(Liebmann 정리)에서 *compact*라는 조건이 없을 때, 이 정리가 성립하지 않는다는 것을 예를 들어 설명하여라.

6.2 곡면 상의 적분

좌표조각사상 $\mathbf{x} : D \to M$의 상 $\mathbf{x}(D)$의 면적 A는

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

로 구해짐은 4.5 절의 정리 4.6에서 살펴보았다.

예제 6.2.1 반경 r인 구면 $S^2(r)$ 상의 지리적 조각사상(예제 4.4.2참조)

$$\mathbf{x}(u,\ v) = (r\cos u\cos v,\ r\sin u\cos v,\ r\sin v)$$

를 직사각형 $R : -\pi \leqq u \leqq \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$에 적용하면 $S^2(r)$을 완전히 덮는다. 계산에 의해

$$E = r^2\cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

이므로

$$A(S^2(r)) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \cos v\, dudv = 4\pi r^2$$

이다. ▣

정리 6.8 곡면 M이 면적형식을 가질 필요충분조건은 M이 유향곡면(*orientable surface*)일 때이다. 이 때, 연결유향곡면(*connected orientable surface*) M은 두 가지의 면적형식 dM과 $-dM$을 갖는다.

[증명] 생략 ▣

[참고] 좌표조각사상 $\mathbf{x} : D \to M$에서

$$\iint_{\mathbf{x}} dM = \iint_D dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v)\, dudv$$

를 의미하고 $dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v) = \pm\| \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \|$을 나타낸다 (정리 4.6참조).

(1) $dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v) > 0$일 때 $\mathbf{x}$는 **양의 방향**(*positively oriented*)으로 정의되었다고 하고, $dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v) = \| \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \|$이므로 $\iint_{\mathbf{x}} dM$은 $\mathbf{x}(D)$의 면적을 나타낸다.

(2) $dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v) < 0$일 때는 $\mathbf{x}$는 **음의 방향**(*negatively orinted*)으로 정의되었다고 말한다. 이 경우에 $dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v) = -\| \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \|$이므로 $\iint_{\mathbf{x}} dM$은 $\mathbf{x}(D)$의 면적을 음으로 한다.

정의 6.2 K를 곡면 M의 Gauss곡률, R을 dM에 의해 방향이 정해진 영역이라 할 때

$$\iint_R K\, dM$$

을 R상에서의 M의 **전곡률(*total curvature*)**이라고 한다.

[참고] $\mathbf{x} : D \to M$일 때

$$\iint_{\mathbf{x}} K\, dM = \iint_D K(\mathbf{x})\sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

를 의미한다.

예제 6.2.2 (1) M의 Gauss곡률이 상수이면, M의 전곡률은

$$\iint_M K\, dM = K \iint_M dM = KA(M)$$

이므로 반경 r인 구면 $S^2(r)$의 전곡률은 $KA(S^2(r)) = \frac{1}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi$이다.

(2) 윤환면 T의 매개변수표시를

$$\mathbf{x}(u,\ v) = ((R + r\cos u)\cos v,\ (R + r\cos u)\sin v,\ r\sin u)$$

라 하면 T의 전곡률을 계산해 보자. 방정식

$$\iint_T K\, dM = \iint_D K(\mathbf{x})\sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

에 4.8절의 예제 4.8.1에서 계산하였던 결과

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}$$

$$dM = \sqrt{EG - F^2}\, dudv = r(R + r\cos u)\, dudv$$

를 대입하면

$$\iint_T K\, dM = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos u\, dudv = 0$$

이다. 즉, T의 안쪽 반에 대한 음의 곡률은 바깥쪽 반위에서의 양의 곡률로 상쇄되므로 결국 T의 전곡률은 0이 된다. 실제로 바깥 윤환면의 전곡률은

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\, dudv = 4\pi$$

이고, 안쪽 윤환면의 전곡률은 -4π가 된다. ▣

연습문제 6.2

1. 회전면의 면적 A는

$$A = 2\pi l\bar{h}$$

로 나타남을 보여라. 단, l은 측면곡선의 길이이고, $\bar{h}$는 회전축으로부터의 측면곡선의 평균거리이다.

2. $xy-$평면 상의 원판 $\{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leqq c^2\}$위에서의 안장곡면 $z = xy$의 표면적을 구하여라.

3. 타원면의 전곡률을 구하여라.

4. 회전쌍곡면

$$M\ :\ \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

의 전곡률은 $\dfrac{-4\pi a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$임을 보여라.

5. 곡면 $M\ :\ x^2 + y^4 + z^6 = 1$의 전곡률을 구하여라.

6. 정리 6.8을 증명하여라.

6.3 측지곡률

곡면 M 위의 점 $\mathbf{p}$를 지나는 M 위의 단위속력곡선 $\beta(s)$의 곡률벡터 $\beta'' = \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$은 곡선 $\beta(s)$의 접벡터 β'에 수직인 평면위에 있다. 법곡률벡터

$$< \beta'', \mathbf{U} > \mathbf{U} = \kappa_n \mathbf{U}$$

는 β''을 $\mathbf{U}$방향으로 정사영(*orthogoral projection*, 연습문제 1.2의 8번 참조) 시킨 것이다. 한편 β''을 M의 접평면위로 정사영한 벡터를 **측지 곡률벡터**(*geodesic curvature vector*)라 정의하고 $\kappa_g\mathbf{V}$라 쓴다. 이 때 $\mathbf{V}$는 M의 접벡터장으로서 $\mathbf{T} \times \mathbf{V} = \mathbf{U}$를 만족하는 단위벡터장이다. 따라서, M 위의 점 $\mathbf{p}$에서

$$\begin{aligned} \beta'' &= \kappa_n \mathbf{U} + \kappa_g \mathbf{V} \\ \kappa_n &=< \beta'',\ \mathbf{U} >,\ \kappa_g =< \beta'',\ \mathbf{V} > \end{aligned} \tag{6.3}$$

가 성립한다. 실제로 β''는 곡선 $\beta(s)$의 주법선벡터장 $\mathbf{N}$의 방향, 법곡률벡터는 단위법벡터장 $\mathbf{U}$의 방향, 측지적 곡률벡터는 $\mathbf{T}$와 $\mathbf{U}$에 수직되는 방향을 갖는다. 이 때 κ_n을 방향 $\beta' = \mathbf{T}$에 대한 곡선 $\beta(s)$의 법곡률이라 정의하였는데, κ_g는 **측지곡률**(*geodesic curvature*)이라 한다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

정리 6.9 곡률벡터는 법곡률벡터와 측지곡률벡터의 합이다.

만약 곡면 M 위의 점 $\mathbf{p}$에서 접벡터 β'에 접하는 M 위의 곡선 $\beta(s)$의 곡률을 $\|\beta''\| = \kappa$라 하고 β''와 $\mathbf{U}$가 이루는 각을 ϕ라 하면 $|\kappa_n| = |\kappa\cos\phi|$와 $|\kappa_g| = |\kappa\sin\phi|$는 각각 곡선 $\beta(s)$의 법곡률과 측지곡률의 크기를 나타낸다. 이 때 (6.3)으로부터

$$\kappa^2 = {\kappa_n}^2 + {\kappa_g}^2$$

를 얻는다.

정리 6.10 $\beta = \beta(s)$를 M 위의 단위속력곡선이라 하면

$$\kappa_g =< \mathbf{U},\ \beta' \times\ \beta'' >$$

이다.

[증명] $\{\mathbf{T},\ \mathbf{V},\ \mathbf{U}\}$는 우수계를 이루므로, $\mathbf{V} = \mathbf{U} \times \mathbf{T}$이다. 따라서

$$\kappa_g =< \beta'',\ \mathbf{V} >=< \beta'',\ \mathbf{U} \times \beta' >=< \beta',\ \beta'' \times \mathbf{U} >=< \mathbf{U},\ \beta' \times \beta'' >$$

이다. ▣

정리 6.11 M에 놓인 단위속력곡선 β가 측지선이 될 필요충분조건은 $\kappa_g = 0$이다.

[증명]

$$\begin{aligned} & \beta\text{가 측지선이다.} \\ \Leftrightarrow\ & \beta'' = \kappa_n \mathbf{U} + \kappa_g \mathbf{V}\ M\ . \\ \Leftrightarrow\ & \kappa_g = 0 \end{aligned}$$

▣

예제 6.3.1 구면 위의 단위속력곡선

$$\beta(s) = (\sin s,\ 0,\ \cos s), \qquad -\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}$$

는 측지선임을 보여라.

[풀이]

$$\mathbf{T} = (\cos s,\ 0,\ \ -\sin s)$$
$$\mathbf{T}' = (-\sin s,\ 0,\ \ -\cos s)$$

이므로, 점$(\sin s,\ 0,\ \cos s)$에서 $\mathbf{U}$는 $\mathbf{U} = (\sin s,\ 0,\ \cos s)$이다. 따라서 $\kappa_n =< \mathbf{T}',\ \mathbf{U} >= -\sin^2 s - \cos^2 s = -1$이다. 한편 $\kappa \equiv \|T'\| = 1$이고 $\kappa^2 = {\kappa_n}^2 + {\kappa_g}^2$이므로 곡선 β에 대해 $\kappa_g \equiv 0$가 성립한다. 그러므로 β는 측지선이다. 실제로 이 곡선 β는 대원의 일부이다. ▣

예제 6.3.2 Monge 조각사상 $\mathbf{x}(u,\ v) = (u,\ v,\ u^2 - v^2)$으로 주어진 곡면 M 위의 임의의 속력곡선 $\alpha(t) = (t,\ 0,\ t^2)$은 측지선임을 보여라.

[풀이] $\alpha(t)$의 단위속력곡선 재매개화(즉, 호장에 관한 표현)을 $\beta(s)$라 하자.

$$\beta' = \alpha' \frac{dt}{ds}$$
$$\beta'' = \alpha''(\frac{dt}{ds})^2 + \alpha' \frac{d^2t}{ds^2}$$

이므로, 정리 6.10에 의하여

$$\kappa_g = < \mathbf{U},\ \beta' \times \beta'' > = < \mathbf{U},\ \alpha' \times \alpha'' > (\frac{dt}{ds})^3$$

이다. 계산에 의해

$$\mathbf{U} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

이므로 $\alpha(t)$를 따라가면서 $\mathbf{U}$는

$$\mathbf{U}(u(t), v(t)) = \frac{(-2t, 0, 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

이고

$$\alpha' = (1,\ 0,\ 2t), \qquad \alpha'' = (0,\ 0,\ 2)$$

이다. 따라서

$$< \mathbf{U},\ \alpha' \times \alpha'' > = 0$$

이므로 $< \mathbf{U},\ \beta' \times \beta'' > = 0$가 되므로 위의 두 정리 6.10과 6.11에 의해 α는 측지선이다. ▣

연습문제 6.3

1. 곡면 상의 직선은 측지선임을 보여라.

2. 한 Monge 조각사상

$$\mathbf{x}(u,\ v) = (u,\ v,\ uv)$$

로 주어진 안장곡면 상의 임의의 속력곡선

$$\alpha(t) = (t, -t, -t^2)$$

은 측지선임을 보여라.

3. 곡면 M 상의 단위속력곡선 β가 측지선이 될 필요충분조건은 β''가 곡면에 수직임을 증명하여라.

4. 곡면 M이 단위속력곡선 $\beta(s) = (r(s),\ z(s))$에 의해 생성된 회전면일 때, 다음을 증명하여라.

(a) 모든 경선(*meridian*)은 측지선이다.

(b) 위선(*circle of latitude or parallel*)이 측지선이 될 필요충분조건은 위선 위의 모든 점에서 경선에서의 접벡터가 회전축과 평행할 때이다.

5. 상수측지곡률을 가지는 구면 상의 곡선은 원임을 보여라.

6.4 Gauss-Bonnet 정리

이 절에서는 특별한 조건하에서 Gauss 곡률과 측지곡률 사이의 관계를 조사하여 보자.

정의 6.3 정칙호(*regular arc*) $C_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$를 끝점에서 끝점으로 연결시켜 놓은 것을 **Jordan 호**(*Jordan arc*)라 한다.

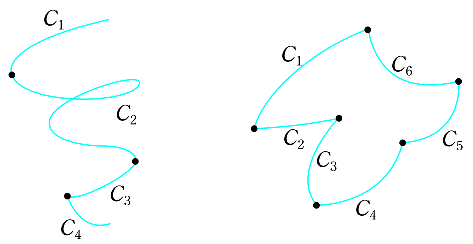


그림 6.3

[참고] Jordan 호 C의 각 성분 C_i가 부분구간 $t_{i-1} \leqq t \leqq t_i$에서 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$로 표현될 수 있으므로, 결국 C는 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(t),\ v(t))$에 의해 표현될 수 있다. 또한 Jordan 호 C의 길이는 C_i의 길이의 합과 같다.

정의 6.4 끝점을 제외하고는 만나지 않는 Jordan 호를 **단순폐 Jordan 호**(*simple closed Jordan arc*) 또는 **다각형곡선**(*polygonal curve*)이라 한다. 다각형곡선 C의 각 성분 C_i를 그 다각형의 **변**(*edge*)이라 하고, 두 변이 만나는 점을 **정점** 또는 **꼭지점**(*vertex*)이라 한다.

정의 6.5 $\alpha : [a,\ b] \to M$을 유향곡면 M 위의 정칙호라 할 때, α의 **전측지곡률**(*total geodesic curvature*)은

$$\int_{s(a)}^{s(b)} \kappa_g(s)\ ds$$

이다. 단 s는 α의 호장함수, $\kappa_g(s)$는 α의 단위속력재매개화의 측지곡률이다.

예제 6.4.1 평면 위에서 반시계방향으로 반경이 r인 원을 따라 움직이는 곡선을 α라 하자. 평면곡선에서는 $\kappa_n = 0$이고 평면곡선의 곡률 k의 정의에 의해 $k = \kappa_g$이므로 α는 일정한 측지곡률 $\kappa_g = \frac{1}{r}$을 갖는다. 따라서 원의 크기에 상관없이 전측지곡률은

$$\int_\alpha \kappa_g \, ds = \frac{1}{r}(2\pi r) = 2\pi$$

이다. α의 방향을 시계방향으로 하면 전측지곡률은 -2π이다. ▣

정의 6.6 R가 닫힌 사각영역 $a \leqq u \leqq b$, $c \leqq v \leqq d$일 때 M안의 **2차원 단편**(*2-segment*)은 닫힌 사각형에서 미분가능한 사상 $\mathbf{x} : R \to M$을 말한다(그림 6.4). 이 때 $\mathbf{x}$의 **변**(*edge*)는 다음과 같은 1차원 단편 α, β, γ, δ로 나타난다.

$$\alpha(u) = \mathbf{x}(u,\ c), \quad \beta(v) = \mathbf{x}(b,\ v)$$
$$\gamma(u) = \mathbf{x}(u,\ d), \quad \delta(v) = \mathbf{x}(a,\ v)$$

또 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}(a,\ c)$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{x}(b,\ c)$, $\mathbf{p}_3 = \mathbf{x}(b,\ d)$, $\mathbf{p}_4 = \mathbf{x}(a,\ d)$를 $\mathbf{x}(R)$의 **꼭지점**(*vertex*)라 부른다.

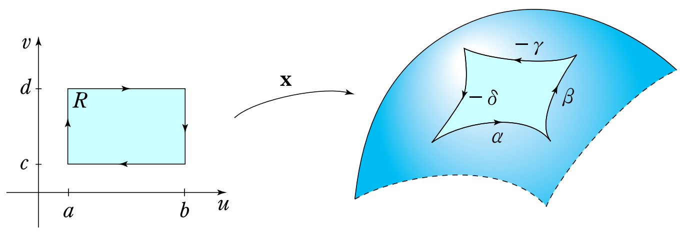


그림 6.4

[참고] 2차원 단편 $\mathbf{x}$의 **경계**(*boundary*) $\partial\mathbf{x}$는

$$\partial\mathbf{x} = \alpha + \beta - \gamma - \delta$$

로 표현된다.

정의 6.7 $\mathbf{x} : R \to M$을 꼭지점 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$를 갖는 일대일이고 정칙인 2차원 단편이라 하자. $\mathbf{p}_j(1 \leqq j \leqq 4)$에서 $\mathbf{x}$의 **외각**(*exterior angle*) ε_j는 $\partial\mathbf{x}$에서 일어나는 순서대로 변 α, β, $-\gamma$, $-\delta$, $\alpha, \cdots$으로부터 유도된 $\mathbf{p}_j$에서의 회전각이다. $\mathbf{p}_j$에서 $\mathbf{x}$의 **내각**(*interior angle*) i_j는 $\pi - \varepsilon_j$이다(그림 6.5).

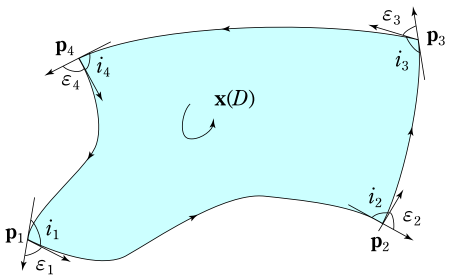


그림 6.5

정리 6.12 (**외각에 관한 Gauss-Bonnet 공식**)
$\mathbf{x} : R \to M$은 곡면 M에 놓인 일대일이고 정칙인 2차원 단편이라 하자. dM을 $\mathbf{x}$에 의하여 결정된 면적형식이라 하면

$$\iint_{\mathbf{x}} K\, dM + \int_{\partial\mathbf{x}} \kappa_g\, ds + \sum_{j=1}^{4} \varepsilon_j = 2\pi \tag{6.4}$$

이다.

[증명] 이 공식의 증명은 생략한다. 이 공식은 증명보다 앞으로 충분히 활용할 수 있도록 이해하면 충분하다.

[참고] $1 \leqq j \leqq 4$에 대하여 $\varepsilon_j = \pi - i_j$이므로 외각에 관한 Gauss-Bonnet 공식은 $\mathbf{x}(R)$의 내각의 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\iint_{\mathbf{x}} K\, dM + \int_{\partial\mathbf{x}} \kappa_g\, ds = \sum_{j=1}^{4} i_j - 2\pi \tag{6.5}$$

정의 6.8 곡면 M의 **직사각형분할**(*rectangular decomposition*) $\mathfrak{D}$란 일대일이고 정칙인 2차원 단편 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m$의 유한개의 모임으로서, 임의의 두 개가 겹치면

(1) 단 하나의 공통의 꼭지점을 갖거나

(2) 하나의 공통의 변을 가지는

조건으로 이들의 상이 M을 덮는 것을 말한다.

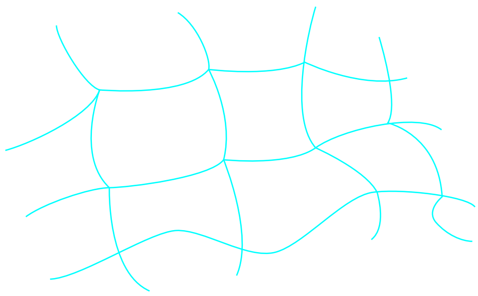


그림 6.6

정리 6.13 모든 *compact*곡면 M은 직사각형분할을 갖는다.

[증명] Lefschetz에 의해 소개되어 있다. ▣

[참고] 곡면 M의 직사각형분할 $\mathfrak{D}$에서 $\mathbf{x}(R_i)(i = 1, \cdots, m)$을 **면**(*face*)이라 부른다.

정리 6.14 *compact* 곡면 M의 직사각형분할을 $\mathfrak{D}$라 할 때, v, e, f를 각각 $\mathfrak{D}$에 속한 정점($vertex$), 변($edge$), 면($face$)의 수라 하면, 정수 $v-e+f$는 M의 직사각형분할에 대해 항상 일정하다. 이 때 정수

$$\chi(M) = v - e + f$$

를 M의 Euler-Poincaré **지표**(*characteristic*)라고 한다. 이로서 Euler-Poincaré 지표는 위상불변량임을 알 수 있다.

[증명] 뒤에서 소개하는 Gauss-Bonnet 정리에 의해 쉽게 증명할 수 있다. ▣

[참고] (1) 위 정리는 다음과 같이 일반화된다. 우선 곡면 전체 대신에 **다각형 영역**(*polygonal region*)을 다루어 보면 직사각형영역 $\mathbf{x}_i(R_i)$로 분할할 수있다. 두 번째로 모든 곳에서 직사각형 R를 다각형으로 바꿀수 있다(다각형 은 단순다각형곡선으로 둘러싸인 $\mathbb{E}^2$의 유계인 영역이다). 이 두 가지 일반화를 결합하면 M에 놓인 다각형영역 W의 **다각형분할**(*polygonal decomposition*) $\mathfrak{D}$를 생각하면 W의 Euler-Poincaré 지표 $\chi(W)$는 다각형분할 $\mathfrak{D}$에 구애받지 않는다.
(2) *compact*곡면 $M,\ M'$에 대하여 $\chi(M) = \chi(M')$이면, M과 M'은 위상동형이다.

예제 6.4.2 Euler-Poincaré 지표

(1) 구면 S^2에 대하여 $\chi(S^2) = 2$이다. 그림 6.7에서와 같이 6면체를 팽창시킴에 의하여 S^2의 사각형분할 $\mathfrak{D}_1$을 얻을 수 있고, $\mathfrak{D}_1$은 분명히 $v = 8,\ e = 12,\ f = 6$이므로 $\chi(S^2) = 2$이다.

또한, 프리즘을 팽창시켜 S^2의 다각형분할 $\mathfrak{D}_2$를 얻을 수 있는데, 이 때는 $v = 6,\ e = 9,\ f = 5$이므로 역시 $\chi(S^2) = 2$이다. 따라서 구면 S^2의 Euler-Poincaré 지표는 사각형분할과 다각형분할에 무관하게 모두 2가 됨을 알 수 있다.

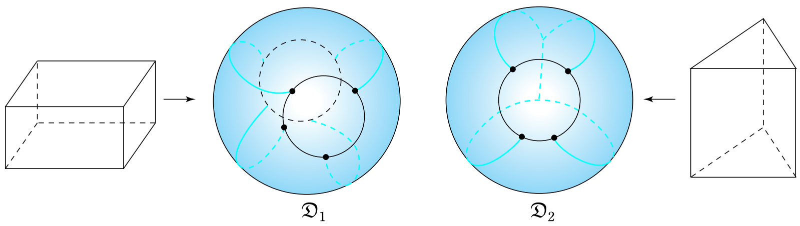


그림 6.7

(2) 윤환면 T의 사각형분할로부터 $\chi(T) = 0$이다. 왜냐하면 그림 6.8에서 보듯이 $v = 4,\ e = 8,\ f = 4$이기 때문이다.

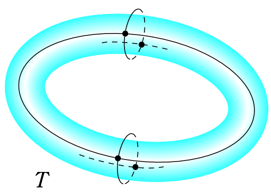


그림 6.8

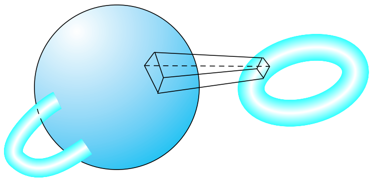


그림 6.9

(3) *compact*곡면 M에 윤환면을 하나 더 붙이는 경우(그림 6.9참조)를 생각하자. 예를 들어, 손잡이($handle$)가 하나인 구면 M위에 있는 한 사각형을 따라서 윤환면을 붙이면 손잡이가 두 개인 곡면이 된다. 이 경우 합해진 곡면 N은 두 개의 곡면위에 사각형면이 겹쳐졌으므로, 면은 두 개, 변은 네 개, 정점은 네 개씩 감소하는 결과가 되어

$$\chi(N) = \chi(M) - (4 - 4 + 2) = \chi(M) - 2$$

이다. 따라서 손잡이가 하나인 구면(윤환면)의 지표는 0이므로 손잡이가 두 개인 구면(2-윤환면 T^2)의 Euler-Poincaré지표는 -2가 된다. ▣

따라서 이것을 공식화하면 다음 정리를 얻는다.

정리 6.15 M이 $\mathbb{E}^3$안에서 *compact*곡면이면 $\chi(M) = 2(1 - h)$이다. 여기에서 h는 M의 손잡이 개수이다.

6-10

정리 6.16 **(Gauss-Bonnet 정리)**

M이 *compact*인 유향곡면이면

$$\iint_M K\, dM = 2\pi\chi(M)$$

이다. 단, K는 M의 Gauss곡률이고, $\chi(M)$은 M의 Euler-Poincaré지표이다.

[증명] 면적형식을 dM으로 하는 M의 향을 고정시키자. 이 때 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_f$를 M의 직사각형분할 $\mathfrak{D}$라 하자. 정의에 따라 M의 전곡률은

$$\iint_M K\,dM = \iint_{\mathbf{x}_1} K\,dM + \cdots + \iint_{\mathbf{x}_f} K\,dM \tag{6.6}$$

이므로, 우변의 각 항에 Gauss-Bonnet 공식 (6.5)를 적용하면

$$\iint_{\mathbf{x}_j} K\,dM + \int_{\partial\mathbf{x}_j} \kappa_g\,ds = \sum_{j=1}^{4} i_j - 2\pi \tag{6.7}$$

이다. 그런데 M은 *compact*곡면이고 각 영역 $\mathbf{x}_j$는 M과 같은 향을 가지고 있으므로, 직사각형분할 $\mathfrak{D}$에서 f개의 모든 직사각형들의 모든 변들은 서로 반대방향으로 두 번씩 겹쳐진다(그림 6.11의 왼쪽그림 참조).

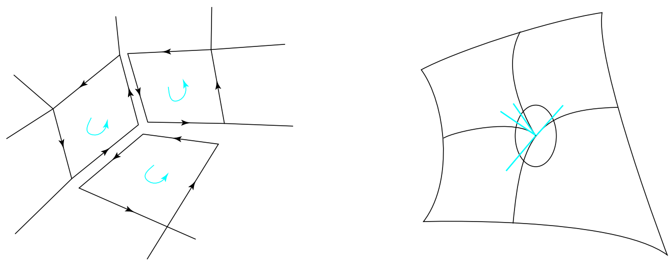


그림 6.10

따라서

$$\sum_{j=1}^{f} \int_{\partial\mathbf{x}_j} \kappa_g\,ds = 0 \tag{6.8}$$

이 된다. 그러므로 (6.6), (6.7)과 (6.8)로부터

$$\iint_M dM = \sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{k=1}^{4} i_k - 2\pi \right) \tag{6.9}$$

를 얻는다. 그런데 각 정점에서 내각의 합은 2π이므로 $\sum_{i=1}^{f}\sum_{k=1}^{4} i_k = 2\pi v$이다(그림 6.11의 오른쪽 그림 참조). 그러면 식 (6.9)는

$$\iint_M K\,dM = 2\pi v - 2\pi f \tag{6.10}$$

가 된다. 한편 직사각형분할 $\mathfrak{D}$의 각 면은 네 개의 변을 가지고 있고, 각 변은 두 개의 면에 속하므로 $4f = 2e$이다. 따라서 $f = 2f - f = e - f$가 성립하므로 (6.10)으로부터

$$\iint_M K\,dM = 2\pi(v - e + f) = 2\pi\chi(M)$$

이 된다. ▣

예제 6.4.3 Gauss-Bonnet 정리를 이용하여 $\chi(S^2(r))$을 구하여라.

[풀이]

$$\begin{aligned}\chi(S^2(r)) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{S^2(r)} K\, dM \\ &= \frac{1}{2\pi}\iint_{S^2(r)} \frac{1}{r^2}\, dM \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2}4\pi r^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

▣

예제 6.4.4 앞 예제 6.4.2에서 구면, 윤환면 및 손잡이의 수가 h인 구면의 Euler-Poincaré지표는 각각 2, 0, $2(1-h)$임을 보였으므로 Gauss-Bonnet 정리를 이용하면, 이들의 전곡률은 각각 $4\pi,\ 0,\ 4\pi(1-h)$임을 알 수 있다. ▣

정리 6.17 $\triangle$를 *compact* 유향곡면 M 위의 삼각형이라면

$$\iint_{\triangle} K\, dM + \int_{\partial\triangle} \kappa_g\, ds = 2\pi - \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j = \sum_{j=1}^{3} i_j - \pi$$

이다. 이 때 ε_j와 i_j는 $\triangle$의 정점 $\mathbf{p}_j$에서 각각 $\triangle$의 외각과 내각을 가리킨다.

[증명] dM을 삼각형 $\triangle$에 대한 면적형식이라 하고 $\mathfrak{D}$를 세 개의 사각형으로 분할하는 $\triangle$의 직사각형분할이라 하자.

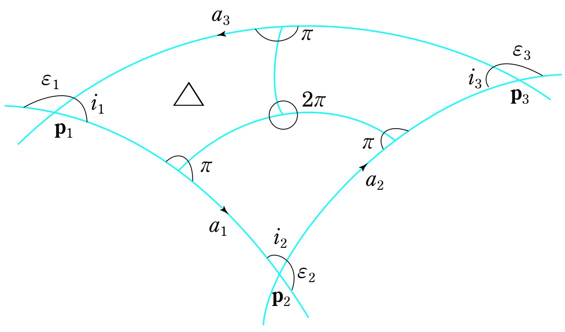


그림 6.11

Gauss-Bonnet 공식 (6.5)에 의하면

$$\begin{aligned}\iint_{\triangle} K\,dM &= \sum_{j=1}^{3}\iint_{\mathbf{x}_j} K\,dM \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(-\int_{\partial\mathbf{x}_j}\kappa_g\,ds + \sum_{k=1}^{3} i_k - 2\pi\right)\end{aligned} \tag{6.11}$$

이다. 경계곡선 $\partial\mathbf{x}_1$, $\partial\mathbf{x}_2$, $\partial\mathbf{x}_3$에 속하는 12개의 변 중에서 여섯개는 쌍으로 상쇄되고 나머지 여섯개의 변은 $\partial\triangle$를 구성하는 곡선 α_1, α_2, α_3가 되므로(그림 6.12참조)

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\mathbf{x}_j}\kappa_g\,ds = \int_{\partial\triangle}\kappa_g\,ds = \int_{\alpha_1}\kappa_g\,ds + \int_{\alpha_2}\kappa_g\,ds + \int_{\alpha_3}\kappa_g\,ds \tag{6.12}$$

가 성립한다. 한편 정점 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$에서 내각 i_1, i_2, i_3의 합은 삼각형 $\triangle$의 내각의 합이고 다른 네 정점에서 세 개의 사각형에 대한 내각의 합은 5π이므로

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} i_k = 5\pi + \sum_{j=1}^{3} i_j \tag{6.13}$$

이다. (6.12)와 (6.13)을 (6, 11)에 대입하면

$$\iint_{\triangle} K\,dM + \int_{\partial\triangle}\kappa_g\,ds = \sum_{j=1}^{3} i_j - \pi$$

를 얻고, $i_j + \varepsilon_j = \pi$이므로 위의 식은

$$\iint_{\triangle} K\,dM + \int_{\partial\triangle}\kappa_g\,ds = 2\pi - \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j$$

로 쓸 수 있다. ▣

예제 6.4.5 각 변이 측지선으로 이루어진 유향곡면 M 위의 삼각형을 **측지삼각형(*geodesic triangle*)**이라 한다. $\triangle$를 M 위의 측지삼각형이라 하자. 그러면 $\partial\triangle$위에서 $\kappa_g = 0$이므로 위의 정리에 의해

$$\iint_{\triangle} K\,dM = \sum_{j=1}^{3} i_j - \pi$$

가 성립한다. 그러므로 측지삼각형의 내각의 합 $\sum_{j=1}^{3} i_j$는 M의 Gauss곡률 K가

(1) $K = 0$ 이면, π이다.

(2) $K > 0$ 이면, π보다 크다.

(3) $K < 0$ 이면, π보다 작다.

이 결과들은 다음과 같이 쓸 수 있다.

(1) 평면 위의 삼각형의 세 내각의 합은 π이다.

(2) 위의 측지삼각형의 세 내각의 합은 π보다 크다.

(3) 쌍곡면 위의 측지삼각형의 세 내각의 합은 π보다 작다.

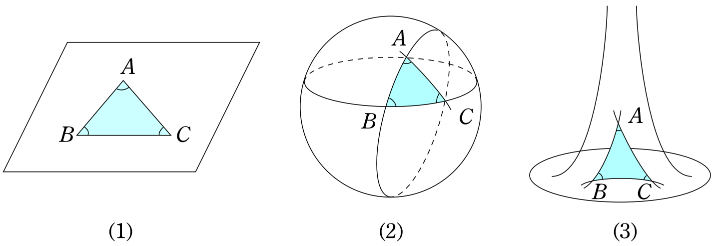


그림 6.12

특히, 상수인 Gauss곡률 K를 갖는 곡면위에서는

$$\iint_{\triangle} K\, dM = K(\triangle)$$

이므로

$$K(\triangle) = \sum_{j=1}^{3} i_j - \pi$$

이다. 따라서 측지삼각형 $\triangle$의 세 내각의 합과 π의 차는 $\triangle$의 면적에 비례한다. 예를 들면, 반경이 1인 구면에서는 $K = 1$이므로 구면 위의 측지삼각형의 면적은 $\sum_{j=1}^{3} i_j - \pi$와 같다. ▣

연습문제 6.4

1. 윤환면 T의 Euler-Poincaré지표는 0임을 보여라.

   그리고, Gauss-Bonnet 정리를 사용하지 말고 $\iint_T K\, d\sigma = 0$임을 보여라.

2. 다음 곡면의 Euler-Poincaré지표를 구하여라.

   (1) 타원면

(2) 곡면 $M = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbf{E}^3|\ x^2 + y^{10} + z^6 = 1\}$

3. 곡면 M이 *compact*이고 Gauss곡률이 양이면 M은 구면과 위상동형임을 보여라.

4. M이 *compact*인 연결곡면이고 Gauss곡률이 양이면, M 위의 임의의 두 단일 닫힌 측지선은 서로 만남을 증명하여라.

5. M이 양의 상수인 Gauss곡률을 가지는 곡면이면 M 위의 측지다각형의 면적은 그의 내각으로 결정됨을 보여라.

6. 정리 6.12를 증명하여라.

7. 정리 6.13을 증명하여라.

8. 정리 6.14를 Gauss-Bonnet 정리를 이용하여 증명하여라.

7 미분가능 다양체

이 장에서는 미분가능 다양체의 기본 개념과 성질에 대하여 소개하고자 한다.

7.1 위상다양체

위상공간 X가 공집합이 아닌 *paracompact* Hausdorff공간일 때, 임의의 점 $\mathbf{p} \in X$에 대하여 n차원 Euclid공간 $\mathbb{E}^n$의 한 열린 부분공간과 위상동형인 $\mathbf{p}$의 열린 근방 U가 존재할 때, X를 n차원 **위상다양체(*topological manifold*)**, 또는, 간단히 n차원 **다양체**라 정의하며, $\mathbf{p}$의 열린 근방 U는 **좌표근방(*coordinate neighborhood*)**이라고 한다.

위에서 언급한 $paracompact$공간이란 X의 임의의 열린 피복이 국소유한세분(*locally finite refinement*)를 가지는 것을 말한다.

> **정리 7.1** 공집합이 아닌 *paracompact* Hausdorff공간 X가 n차원 다양체가 될 필요충분조건은 임의의 점 $\mathbf{p} \in X$에 대하여 n차원 Euclid공간 $\mathbb{E}^n$과 위상동형인 $\mathbf{p}$의 열린 근방 V를 갖는 것이다.

[증명] n차원 다양체 X의 임의의 점 $\mathbf{p}$에 대하여, 정의로부터 $\mathbf{p}$의 열린 근방 U가 존재해서 $i(U)$가 $\mathbb{E}^n$의 열린집합이 되는 위상동형사상

$$i : U \ \rightarrow \ \mathbb{E}^n$$

이 존재한다. 따라서 $i(U)$는 $\mathbf{x} = i(\mathbf{p})$를 포함하는 한 열린 근방이므로 적당한 δ가 존재하여 $\mathbf{x}$의 열린 $\delta-$공(*open δ-ball*)

$$B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^n | \ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\} \ \subset \ i(U)$$

되는 적당한 δ가 존재한다. 이 때, $V = i^{-1}(B_\delta(\mathbf{x}))$는 점 $\mathbf{p}$의 열린 근방으로서 $\mathbb{E}^n$과 위상동형이다.

$\mathbb{E}^n$은 자기자신의 열린 부분공간이므로 정리의 역은 명백하다. ▣

[참고] 위의 정리로부터 위상다양체를 흔히 **국소적 Euclid공간(***locally Euclidean space***)**이라고도 한다.

정의 7.1 $\mathbb{E}^n$ 상의 **단위** δ**-공(***unit* δ*-ball***)**이란

$$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n |\ \|\mathbf{x}\| \leqq 1\}$$

을 말한다(그림 7.1).

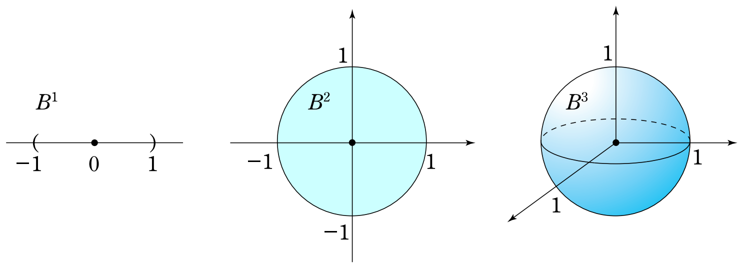


그림 7.1

정리 7.2 n차원 다양체 X의 임의의 점 $\mathbf{p}$의 근방 N은 단위$\delta-$공 B^n과 위상동형인 $\mathbf{p}$의 근방 M을 포함한다.

[증명] n차원 다양체 X의 임의의 점 $\mathbf{p}$에 대하여, $\mathbf{p}$의 열린근방 U가 존재해서 $i(U)$가 $\mathbb{E}^n$의 열린집합이 되는 위상동형사상

$$i : U \ \rightarrow \ \mathbb{E}^n$$

이 존재한다. 따라서 $\mathbf{x} = i(\mathbf{p})$, $W = U \cap Int(N)$이라 두면, $i(W)$는 $\mathbf{x}$의 한 열린근방이므로 $\mathbf{x}$의 폐$\delta-$공

$$C_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^n |\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqq \delta\} \ \subset i(W)$$

가 존재한다. 이 때 $M = i^{-1}(C_\delta(\mathbf{x}))$는 $\mathbf{p}$의 근방으로 B^n과 위상동형이다. ▣

예제 7.1.1 (1) n차원 Euclid공간 $\mathbb{E}^n$과 n차원 구 S^n은 n차원 다양체이다. (2) n차원 다양체의 모든 공집합이 아닌 열린부분공간은 n차원 다양체이다. (3) n차원 다양체

들의 위상적 합은 n차원 다양체이다. (4) m차원 다양체와 n차원 다양체의 위상적 곱은 $(m+n)$차원 다양체이다. 예를 들면, $S^1 \times S^1$은 2차원 다양체이다.
▣

7.2 미분가능 구조

n차원 다양체 X의 공집합이 아닌 열린부분공간 U에서 $\mathbb{E}^n$으로의 위상동형

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{E}^n$$

에 대해 $\phi(U)$가 $\mathbb{E}^n$의 열린부분공간일 때, ϕ를 X상에서의 **도표(*chart*)**라 한다. 이 때 X의 열린부분공간 U는 ϕ의 **정의역(*domain*)**이라 하고, 기호로

$$U = Dom(\phi)$$

라 쓴다.

$$p_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$$

을

$$p_i(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n) = t_i$$

라 정의할 때, p_i를 **자연사영(*natural projection*)**이라 한다. 그리고 X 상의 도표 $\phi : U \rightarrow \mathbb{E}^n$에 대해 ϕ와 p_i의 합성함수

$$\phi_i = p_i \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$$

은 도표 ϕ에 관한 i번째 **좌표함수(i^{th} *coordinate function*)**라 하고, 실수 $t_i = \phi_i(\mathbf{x})$는 $\mathbf{x}$의 i번째 **좌표(i^{th} *coordinate*)**라 부른다. 이에따라 도표 ϕ를 U에서의 **국소좌표계(*local coordinate system*)**라고도 한다. $\mathbf{x} \in U$에 대해

$$\phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}),\ \phi_2(\mathbf{x}),\ \cdots,\ \phi_n(\mathbf{x})) = (t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$$

으로 표현되는 n개의 실수 $(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$은 ϕ에 관한 점 $\mathbf{x}$의 **좌표(*coordinate*)**라 한다.

정의 7.2 $\mathbb{E}^n$의 열린부분공간 W와 함수 $f : W \to \mathbb{R}$에 대해

(1) f가 연속함수이면, f를 C^0 **급**(*class* C^0)의 함수

(2) f가 $r \leqq k$인 모든 r에 대하여 차수(*order*)가 r인 연속인 편도함수를 가질 때, f를 C^k **급**(*class* C^k)의 함수

(3) f가 모든 양의 정수 k에 대하여 C^k급의 함수이면, f를 C^∞ **급**(*class* C^∞)의 함수, 또는 **미끄러운 함수**(*smooth function*)라 하고

(4) f가 해석적(*analytic*) 함수일 때는 f를 C^ω**급**(*class* C^ω)의 함수라고 한다. 더욱이 $f : W \to \mathbb{E}^n$에 대해 f와 각 자연사영 p_i의 합성함수 $f_i = p_i \circ f : W \to \mathbb{R}$가 C^k급의 함수이면, f를 C^k **급**(*class* C^k)의 함수라고 부른다. ▣

지금부터 이 절에서 k는 $K = \{0, 1, , \cdots, \infty, \omega\}$의 원소라 한다.

정의 7.3 n차원 다양체 X에서 다음의 두 조건을 만족하는 X 상의 도표들의 모임 α를 C^k**급의 좌표근방계**(*atlas of class* C^k)라 한다.

(A_1) α에 속하는 모든 도표들의 정의역은 X를 피복한다.

즉 $\cup_{\phi\in\alpha} Dom(\phi) = X$이다.

(A_2) α에 속하는 두 도표 $\phi : U \to \mathbb{E}^n$과 $\psi : V \to \mathbb{E}^n$에서 $U \cap V$가 공집합이 아닐 때, $f_{(\phi,\psi)}(\mathbf{t}) = \psi(\phi^{-1}(\mathbf{t}))$로 정의되는

$$f_{(\phi,\psi)} : \phi(U \cap V) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$$

는 $\phi(U \cap V)$에서 C^k급의 함수이다(그림 7.2참조).

[참고] $f_{(\phi,\psi)}$는 연속함수이므로 모든 n차원 다양체는 C^0급의 좌표근방계를 가진다.

$\alpha^k(X)$를 X 상의 C^k급의 모든 좌표근방계들로 된 집합이라 하자. 여기에서 $k \neq 0$이면, 주어진 집합은 공집합일 수도 있다.

$\alpha^k(X)$에 속하는 두 좌표근방계 α와 β에 대해 $\alpha \backsim \beta$를 $\alpha \cup \beta$가 $\alpha^k(X)$에 속할 때라고 정의하면, 관계 $\backsim$는 반사률, 대칭률, 추이률이 성립하므로 이는 동치관계가 된다. 따라서 우리는 $\alpha^k(X)$를 동치류로서 분할할 수 있는데, 이러한 동치

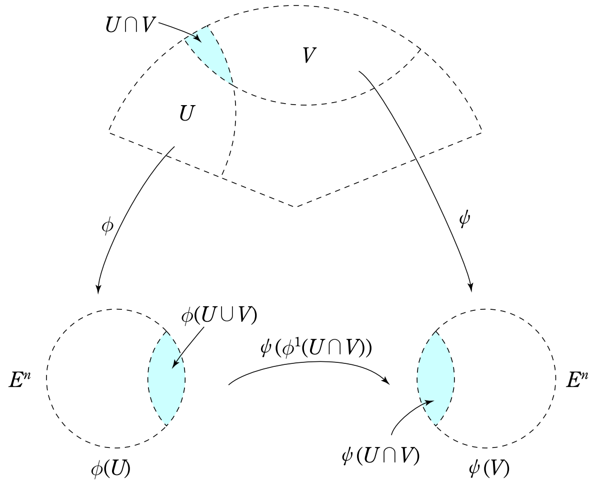


그림 7.2

류의 각각을 n차원 다양체 X 상의 C^k급의 **미분가능 구조**(*differentiable structure*)라 한다.

다음의 정리는 명백하다.

정리 7.3 n차원 다양체 X 상의 C^0급의 임의의 두 좌표근방계는 동치이다.

[참고] 앞의 참고와 정리 7.3으로 부터 n차원 다양체에는 C^0급의 유일한 미분가능 구조가 존재한다. 그러나 $k \neq 0$인 경우에 C^k급의 미분가능 구조는 없을 수도 있고, 많이 존재할 수도 있다.

주어진 n차원 다양체 X 상의 C^k급의 임의의 미분가능 구조 σ를 생각해 보자. 정의에 의해 σ는 $\alpha^k(X)$에 속하는 좌표근방계들로 이루어진 한 동치류이다. 그리고 μ_σ를 σ에 속하는 모든 좌표근방계들의 합집합으로 나타내자. 즉

$$\mu_\sigma = \bigcup_{\alpha\in\sigma} \alpha$$

이다.

정리 7.4 μ_σ는 $\alpha^k(X)$에 속하는 한 좌표근방계이다.

[증명] 정의 7.2의 (A_1)은 명백하므로 (A_2)에 대해 증명해 보자. μ_σ에 속하는

임의의 두 도표

$$\phi : U \to \mathbb{E}^n, \quad \psi : V \to \mathbb{E}^n$$

에 대해 μ_σ의 정의로 부터 $\phi \in \alpha$, $\psi \in \beta$를 만족하는 α와 β가 σ에 속한다. 이때 $\alpha \backsim \beta$이므로 (A_2)가 성립한다. ▣

$\mu_\sigma \cup \alpha = \mu_\sigma$이므로 $\backsim$의 정의로부터 다음 정리가 성립한다.

정리 7.5 임의의 $\alpha \in \sigma$에 대해서 $\mu_\sigma \backsim \alpha$이다.

[참고] 위의 정리에서 μ_σ는 σ에 속하는 모든 좌표근방계 α를 포함하므로, 미분가능 구조 σ로부터 **극대 좌표근방계**를 생각할 수 있음을 보여준다. 따라서 μ_σ의 유일성에 의해 미분가능 구조 σ는 유일한 극대좌표근방계 μ_σ와 동일시해도 좋을 것이다.

정의 7.4 C^k급의 미분가능 구조를 가지는 n차원 다양체를 C^k**급의** n**차원 미분가능 다양체**(*differentiable n-manifold of class* C^k)라 하고, 특별히 $k = \infty$이면 **미끄러운 다양체**(*smooth manifold*), $k = \omega$이면 **해석적 다양체**(*analytic manifold*)라 한다.

예제 7.2.1

(1) Euclid공간 $\mathbb{E}^n$에서 항등함수 $i : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$은 한 도표이고, $\alpha = \{i\}$는 모든 $k \in K$에 대하여 C^k급의 좌표근방계이다. 따라서 이 좌표근방계는 모든 $k \in K$에 대하여 C^k급의 미분가능 구조 σ를 결정하고 σ에서의 극대좌표근방계 μ_σ는 C^k급의 도표 $\phi : U \to \mathbb{E}^n$ (단, U는 $\mathbb{E}^n$의 열린부분집합)으로 이루어 진다. 따라서 $\mathbb{E}^n$은 해석적 다양체이다.

(2) $(n+1)$차원 Euclid공간 $\mathbb{E}^{n+1}$안에 있는 단위구 S^n을 생각하자. 임의의 $\mathbf{x} \in S^n$에 대해 입체사영(*stereographic projection*) $\phi_\mathbf{x} : S^n - \{\mathbf{x}\} \to \mathbb{E}^n$은 S^n상의 한 도표이다. 따라서

$$\alpha = \{\phi_\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S^n\}$$

는 C^k급의 한 좌표근방계가 되어, 좌표근방계 α는 S^n상에서의 미분가능 구조를 결정해 준다. 그러므로 S^n은 해석적 다양체이다.

(3) C^k급의 n차원 미분가능 다양체의 공집합이 아닌 열린부분공간도 C^k급의 n차원 미분가능 다양체이다.

(4) 서로 소인 두 개의 C^k급의 n차원 미분가능 다양체의 위상적 합도 역시 C^k급의 n차원 미분가능 다양체이다.

(5) C^k급의 m차원 미분가능 다양체와 n차원 미분가능 다양체의 위상적 곱은 C^k급의 $(m+n)$차원 미분가능 다양체이다. ▣

$\infty < \omega$임을 알고있으므로 다음의 정리는 명백하다.

정리 7.6 n차원 다양체 X 상의 C^k급의 미분가능한 좌표근방계는 $h \leqq k$인 모든 h에 대해서 C^h급의 미분가능한 좌표근방계이다.

[참고] C^k급의 n차원 미분가능 다양체 X는 $h \leqq k$인 모든 h에 대해서 C^h급의 미분가능 다양체이다.

연습문제 7.2

1. n차원 실사영공간(*real projective space*) $P_n\mathbb{R}$과 $2n$차원 복소사영공간(*complex projective space*) $P_n\mathbb{C}$상에 좌표근방계를 구성하여라.

2. Euclid공간 $\mathbb{E}^3$의 부분공간

$$S = \{(x,\ y,\ z) \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$$

은 2차원 해석적 다양체임을 보여라.

3. Euclid공간 $\mathbb{E}^3$의 부분공간

$$C = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 - y^2 + 2xz - 2yz = 0,\ 2x - y + z = 0\}$$

는 1차원 해석적 다양체임을 보여라.

4. 정리 7.3을 증명하여라.

5. 정리 7.5를 증명하여라.

6. 정리 7.6을 증명하여라.

7.3 접공간

미분가능 구조 ξ를 가지는 C^k급의 m차원 미분가능 다양체 X와 미분가능 구조 η를 갖는 C^k급의 n차원 미분가능 다양체 Y에 대해서 함수 $f : X \to Y$를 생각하자.

ξ의 극대좌표근방계에 속하는 도표 $\phi : U \to \mathbb{E}^m$과 η의 극대좌표근방계에 속하는 도표 $\psi : V \to \mathbb{E}^n$에 대해 $W = U \cap f^{-1}(V)$가 공집합이 아닐 때,

$$f_{(\phi,\psi)}(\mathbf{t}) = \psi(f(\phi^{-1}(\mathbf{t})))$$

로 정의되는 함수 $f_{(\phi,\psi)} : \phi(W) \subset \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$이 $\phi(W)$에서 C^h급(단, $h \leqq k$)의 함수이면, 주어진 함수 f는 C^h급의 **미분가능 함수**(*differentiable function of class* C^k)라 정의한다.

X의 공집합이 아닌 임의의 열린부분공간 U에서 함수 $f : U \to Y$가 ξ에 의해서 유도된 U에서의 미분가능 구조 $\xi|U$에 대해 C^h급의 미분가능 함수이면, 함수 f는 C^h급의 **미분가능 함수**라고 한다.

더욱 일반화하여, X의 공집합이 아닌 임의의 부분공간 A와 함수 $f : A \to Y$에서 A를 포함하는 한 열린근방 U에서의 f의 확장함수로서 C^h급의 미분가능 함수 $g : U \to Y$가 존재할 때, 함수 f는 C^h급의 **미분가능 함수**라고 한다.

> **정의 7.5** X와 Y가 C^k급의 n차원 미분가능 다양체라 하고 $h \leqq k$라 하자. 함수
>
> $$f : X \to Y$$
>
> 가 전단사함수로 f와 그 역함수 $f^{-1} : Y \to X$가 모두 C^h급의 미분가능 함수이면, f는 C^h급의 **미분동형사상**(*diffeomorphism of class* C^h)이라 하고, 이 때 X와 Y는 **미분동형**(*diffeomorphic*)이라 한다.

이제부터는 X를 n차원 미끄러운 다양체라 하자. $\mathbf{x} \in X$의 열린근방 U에 대하여

$$f : U \to \mathbb{R}$$

가 미끄러운 함수일 때, f는 $\mathbf{x}$에서 **국소적 미끄러운 함수**(*local smooth function*)라 한다.

$\mathbf{x} \in X$에서의 모든 국소적 미끄러운 함수들로 된 집합을 $L(X, \mathbf{x})$로 나타내고, $L(X, \mathbf{x})$에 다음과 같이 가법과 스칼라곱을 정의한다.

임의의 실수 $a,\ b$와 $L(X,\mathbf{x})$에 속하는 두 국소적 미끄러운 함수

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad g : V \to \mathbb{R}$$

에 대하여, 두 함수

$$af + bg,\ fg : U \cap V \to \mathbb{R}$$

를

$$(af + bg)(\mathbf{p}) = af(\mathbf{p}) + bg(\mathbf{p}), \quad (fg)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})$$

로 정의한다. 이 때, $L(X,\mathbf{x})$는 $U = V$가 아니면

$$f + (-f) \neq g + (-g)$$

이므로 벡터공간은 아니다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 $L(X,\mathbf{x})$에 다음과 같은 관계 $\backsim$를 생각해 보자.

$L(X,\mathbf{x})$에 속하는 두 국소적 미끄러운 함수

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad g : V \to \mathbb{R}$$

에서 $f \backsim g$를 W상에서 $f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})$되는 $\mathbf{x}$의 열린근방 W가 존재할 때라 하면, 관계 $\backsim$은 $L(X,\mathbf{x})$에서 동치관계가 된다. 따라서 동치관계 $\backsim$를 이용하여 $L(X,\mathbf{x})$를 동치류로 분할할 수 있는데, 각각의 잉여류를 X의 점 $\mathbf{x}$에서의 **미끄러운 싹**(*smooth germ*)이라 한다. 이 때 $\mathbf{x}$에서의 모든 미끄러운 싹들로 된 집합을 $G(X,\mathbf{x})$로 나타낸다.

정의 7.6 $\mathbf{x} \in X$에서 함수 $v : G(X,\ \mathbf{x}) \to \mathbb{R}$이 다음의 두 조건을 만족할 때, v를 $\mathbf{x}$에서의 **접벡터**(*tangent vector*)라 한다.

(1) v는 $G(X,\mathbf{x})$에서 선형이다.

즉, 임의의 실수 $a,\ b$와 $\omega,\ \theta \in G(X,\ \mathbf{x})$에 대해서

$$v(a\omega + b\theta) = av(\omega) + bv(\theta)$$

가 성립한다.

(2) v는 **미분**(*derivation*)이다.

즉, 임의의 $\omega,\ \theta \in G(X,\mathbf{x})$에 대해서

$$v(\omega\theta) = v(\omega)\theta(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x})v(\theta)$$

가 성립한다.

$\mathbf{x} \in X$에서의 모든 접벡터들로 된 집합을 $T(X, \mathbf{x})$로 나타내자. 이 때, 임의의 실수 a, b와 v, $w \in T(X, \mathbf{x})$에 대하여 함수

$$av + bw : G(X, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{R}$$

를

$$(av + bw)(\omega) = av(\omega) + bw(\omega)$$

로 정의하면, $av + bw \in T(X, \mathbf{x})$이고 $T(X, \mathbf{x})$는 위의 연산에 의해 벡터공간이 됨을 알 수 있다. 이 벡터공간 $T(X, \mathbf{x})$를 $\mathbf{x} \in X$에서의 **접공간**(*tangent space*)이라 한다.

$\mathbf{x} \in X$의 구조를 결정하기 위하여 $\mathbf{x} \in X$에서의 한 도표 $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$을 생각하자. 임의의 $\omega \in G(X, \mathbf{x})$에 대해 $p(f) = \omega$를 만족하는 $L(X, \mathbf{x})$에 속하는 국소적 미끄러운 함수 $f : V \rightarrow \mathbb{R}$를 택하자.

여기서 $p : L(X, \mathbf{x}) \rightarrow G(X, \mathbf{x})$는 자연사상이다. 한편

$$g(\mathbf{t}) = f(\phi^{-1}(\mathbf{t}))$$

로 정의되는

$$g : \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}$$

은 $\mathbb{R}^n$의 열린부분공간 $\phi(U \cap V)$에서 미끄러운 함수이다. 편도함수 $\frac{\partial g}{\partial t_i}(\phi(\mathbf{x}))$는 미끄러운 싹 ω로부터 f의 선택에 무관하므로 $\frac{\partial}{\partial \phi_i}(\omega)$를

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i}(\omega) = \frac{\partial g}{\partial t_i}(\phi(\mathbf{x}))$$

라 정의하면, 이는 $\mathbf{x}$에서의 접벡터이다.

정리 7.7 X가 n차원 미끄러운 다양체일 때, $\mathbf{x} \in X$에서의 n개의 접벡터

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \phi_n}$$

는 $T(X, \mathbf{x})$의 한 기저를 이룬다.

[증명] $\mathbf{x}$에서의 임의의 접벡터 v는

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(p(\phi_i)) \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

로 표시됨을 증명하여 $\dfrac{\partial}{\partial\phi_1}, \dfrac{\partial}{\partial\phi_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial\phi_n}$이 $T(X, \mathbf{x})$를 생성함을 보이고,

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(p(\phi_j)) = \delta_{ij}$$

임을 이용하여 주어진 벡터들이 일차독립임을 보인다. ▣

연습문제 7.3

1. $f(x,\, y) = (xe^y - y,\, xe^y + y)$로 정의된 함수 $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$는 미분동형사상임을 보여라.

2. n차원 미분가능 다양체 X 상의 C^k급의 두 미분가능 구조 $\xi,\, \eta$에 대하여 $\xi = \eta$일 필요충분조건은 항등함수 $i : (X,\, \xi) \to (X,\, \eta)$는 C^k급의 미분동형사상임을 보여라.

3. $\mathbf{x} \in X$에서의 접공간 $T(X,\, \mathbf{x})$는 벡터공간임을 보여라.

4. 정리 7.7의 $\dfrac{\partial}{\partial\phi_i}$는 접벡터임을 보여라

5. 정리 7.7의 증명을 완성하여라.

8 Mathematica 소개

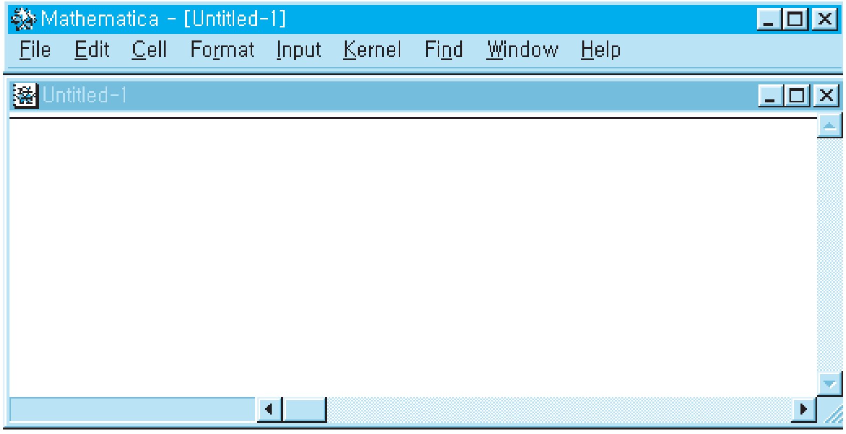
Mathematica(매스매티카)는 1988년 6월 미국의 이론물리학자겸 수학자인 Stephen Wolfram에 의하여 버전 1이 개발된 후, 다양한 운영체제에 적용될 수 있도록 계속 발전되어, 2003년 1월 현재 최신 버전 4.2가 개발되었다.

수학적인 계산을 실행하는 데 사용할 수 있는 유용한 컴퓨터 프로그램은 요즈음 많이 개발되고 있으며 그 중요성이 날로 증가하고 있다. 수학 교육의 방법에서의 변화가 절실히 요구되는 현실에서, 대학에서 널리 사용되어지고 있는 수학용 소프트웨어는 Mathematica, Maple, Matlab 등이 있으며 그 중에서 가장 보편적으로 사용되고 있는 Wolfram Research 회사에서 개발한 Windows용 Mathematica를 사용하여 미분기하학에 관련된 내용을 실습해보고자 한다. 이 책은 version 3.0을 위주로 하였으나 이 책의 내용을 실습하는 데는 version 3.0이상이면 문제가 없을 것이다. 이후부터 Mathematica 3.0과 4.2를 통칭하여 Mathematica라 이름 할 것이다.

Mathematica는 수학의 폭넓은 분야(Algebra, Calculus, Differential Equations, Discrete Mathematics, Engineering Mathematics, Geometry, Linear Algebra, Number Theory, Numerical Analysis, Vector Analysis, Statistics 등)에 활용이 가능하다.

Mathematica를 설치하는 방법은 다른 소프트웨어와 마찬가지로 구입할 때 포함된 설치설명서가 있으므로 설치방법에 대한 내용을 참조하면 된다.

Mathematica를 설치한 다음, 실행을 시키면 다음과 같은 화면이 나타난다.



이 화면 위에서 작업을 하면 된다. 그러면 이제 Mathematica를 어떻게 사용하는지 알아보자.

처음에 실행하는 명령은 간단한 계산, 예를 들어

$$\mathbf{1+1} \qquad\qquad < Shift + Enter >$$

해야 제대로 작동한다. 여기서

$$< Shift + Enter >$$

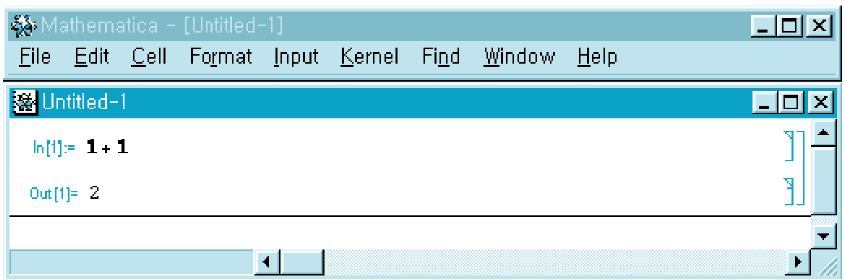
는 명령 입력 완료 즉, 명령 실행을 나타내는데 이 두 키를 동시에 눌러야 한다. 설치후는 물론이고 이후에도 Mahtematica를 처음 실행할 때는 항상 간단한 계산을 먼저 실행하여 Mahtematica를 구동하도록 하자.

실행 뒤에는 자동으로 입, 출력표시 $In[\,]$, $Out[\,]$가 생기면서

$$\boldsymbol{In}[1] := \mathbf{1+1}$$

$$Out[1] = 2$$

가 되는 것을 알 수 있다.



즉, 화면에 나타난 $In[\,]$, $Out[\,]$는 일종의 프롬프트로 명령(1+1)을 입력한 다음 실행($< Shift + Enter >$)하면 그 다음에 자동으로 화면에 표시되는 것이다. $In[\,]$이라는 프롬프트는 사용자가 입력한 내용(명령)에 대하여 붙여지는 것이며, $Out[\,]$라는 것은 그 명령을 실행했을 때 나타나는 결과에 대하여 붙여지는 것이다.

책을 편집하면서 Mathematica실습(8,9장)에서 Mathematica를 실행하면 생기는 $In[\ ] :=$과 $Out[\ ] =$은 생략하였으며, 위의 화면처럼 Mathematica를 실행한 후 나타나는 결과와 같이 $In[\ ] :=$은 **굵은 글씨체**로 쓰고 $Out[\ ] =$은 보통의 글씨체로 나타내었다.

실습을 하면서 가장 중요한 Mathematica **명령 입력에 관한 주의사항**에 대하여 알아보자.

(1) Mathematica에서는 **대, 소문자를 구별**하여 사용하여야 한다.

(2) 명령어 및 예약상수의 첫 글자는 항상 **대문자**이어야 한다.

(3) 여러 단어로 이루어진 명령어의 각 단어의 첫 글자도 **대문자**이어야 한다.

(4) 변수는 계속 연결되어 사용되므로 다른 목적으로 같은 변수를 사용할 때는 **Clear[변수]** 명령을 이용하여 변수를 깨끗이 정리해 주지 않으면 오류가 생길 수 있다.

(5) 명령문 작성중 주석(comment)문을 삽입할 때는 (* **주석문** *)을 사용한다. 즉, 주석문 (* *)는 비실행문이다.

저자들이 수년간 강의를 해오면서 느낀 것은, Mathematica를 처음 사용하는 사람들은 외워야 하는 명령어의 수와 규칙이 너무 많아서 힘들어 하지만, 자꾸 사용하다보면 그 명령어들이 모두 수학용어 그대로이며, 또 그 규칙들이 너무나 수학적이라는 사실에 놀란다는 것이다. 수학만해도 골치가 아픈데 Mathematica까지 해야하나라고 느꼈던 생각은 곧 없어지게 되고 수학을 이렇게도 할 수 있구나라는 경험에 매우 흡족해 한다는 것이다. Mathematica를 사용하는 학생들에게 저자들이 하고 싶은 말은 이 한 과목뿐만이 아니라 여러가지 수학문제 해결에 Mathematica를 꾸준히 사용하다보면 Mathematica가 수학 그자체의 일부분이 되면서 가속도가 붙게되며, 어느 정도 숙달될 때까지는 시간투자를 하지않으면 안된다는 것이다. 실습에 앞서 Mathematica를 처음 사용하는 사람이라면 누구나가 한번쯤은 겪는 부분을 다시 한번 언급하면 다음과 같다.

(1) 모든 명령어는 첫자가 **대문자**로 시작한다.

(2) 명령어는 항상 **동사**[**목적어, 부사(또는 전치사)**]의 형태를 취한다.

(3) Mathematica **명령어의 실행**은 <Shift> + <Enter>을 동시에 누른다.

(4) [ ], { }, ( )와 같은 **괄호체계** 및 사용법에 유의 해야 한다.

(5) 그래프를 그릴 때 가로 : 세로의 길이의 비는 황금비로 그린다.
(가로 : 세로 =1:1의 명령어는 **AspectRatio** − > **Automatic**이다)

(6) **문자변수와 문자변수의 곱**을 나타낼 때 사이는 반드시 띄우거나 ∗표시를 해야 한다.
($x * y$ 또는 $x\ y$로 입력해야만 한다)

(7) 숫자와 문자변수의 곱에서는 사이는 붙여 써도 된다.
($2x$ 또는 $2\ x$ 로 입력할 수 있다)

(8) " ="과 " =="의 차이점(" ="은 **대입**, " =="은 **등호**임)에 유의하라.

이상의 주의사항은 Mahtematica를 사용할 때는 언제나 상기해야 한다. 다음으로 강조하고 싶은 것은, Mathematica를 이용하여 수학문제를 해결하고자 할 때 어떤 부분에서 어떤 명령어를 사용해야 하는지에 대해 알고 싶으면 Help기능을 충분히 활용하라는 것이다. 명령어 사용방법에 도움을 주는 Help기능에 대해 설명하면 다음과 같다.

< Help 기능 설명 >

예를 들어, Solve라는 명령어에 대해 알고 싶다면 다음과 같이 하면 된다.

(1) ?를 입력하고 바로 Solve라는 명령어를 Mathematica 실행창에 입력한다. 여기서 주의할 점은 S를 대문자로 써야한다. Mathematica에서 명령어 시작은 앞의 주의사항에서 언급된 바와 같이 항상 대문자로 시작한다. 이부분은 초보자가 가장 많이 실수하는 것 가운데 하나이다. 그리고 Mathematica에게 실행하라고 명령을 한다. 그 방법은 Shift키와 Enter키를 동시에 눌러주면 된다. 위 방법대로 하면 다음의 결과가 나온다.

?*Solve*

Solve[eqns, vars] attempts to solve an equation or set of equations for the variables vars. Solve[eqns, vars, elims] attempts to solve the equations for vars, eliminating the variables elims.

여기서는 지금 Help기능을 성명하므로 Solve의 기능은 조금 뒤에 다시 설명을 하기로 하자.

(2) 다음 명령을 써보자. 이 경우는 Sol까지는 생각이 나는데 그 뒤가 무엇인지 알쏭달쏭 할 때 사용하면 유용하다. 먼저 ?를 쓰고 Sol까지만 쓰고 그리고 별표(*)를 한다. 그러면 다음과 같은 결과가 나온다. 물론 여기서도 S는 대문자임에 주의하여라.

$?Sol*$

SolutionOf Solve SolveAlways SolveDelayed

결과는 Sol로 시작하는 모든 명령어를 보여 준다. 이 기능dms 명령어 단어를 확실히 모를 때 사용하면 편리하다.

(3) 다음은 $?Solve$에서 ?를 하나 더 사용한다. 그러면 Solve에 대한 더 상세한 정보 즉, Solve에서 사용되는 선택사항들(Options)을 포함한 정보가 나온다.

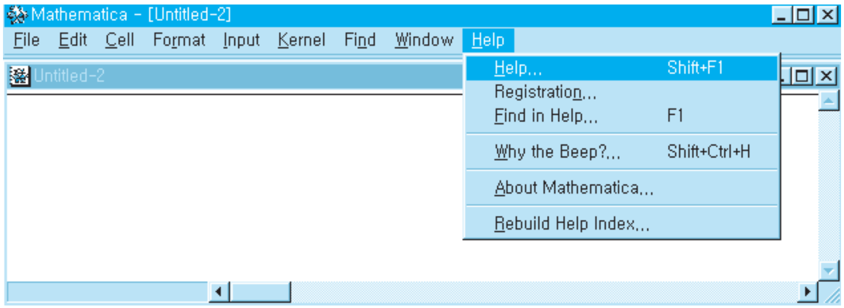
$??Solve$

Solve[eqns, vars] attempts to solve an equation or set of equations for the variables vars. Solve[eqns, vars, elims] attempts to solve the equations for vars, eliminating the variables elims.

Attributes[Solve] = Protected

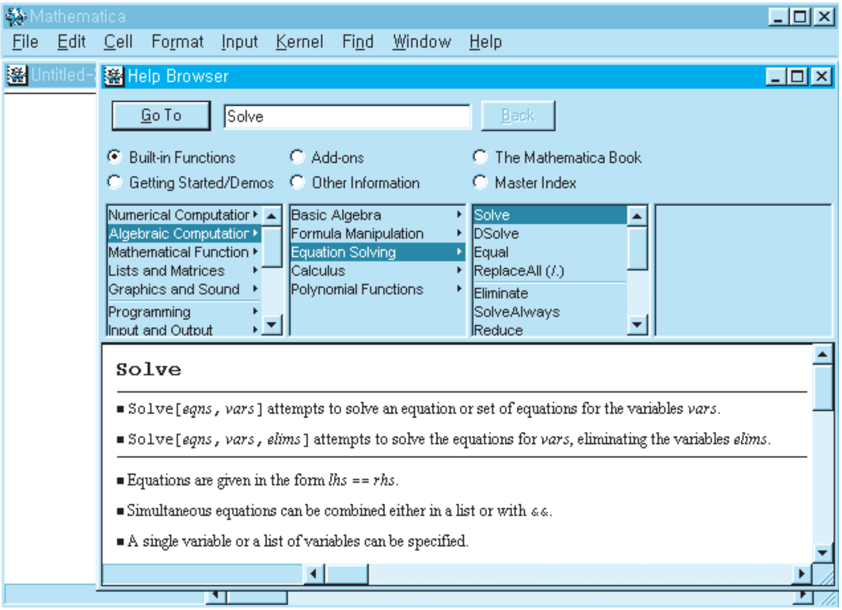
Options[Solve] = { InverseFunctions – > Automatic, MakeRules – > False, Method – > 3, Mode – > Generic, Sort – > True, VerifySolutions – > Automatic, WorkingPrecision – > Infinity }

(4) 위에서 설명한 방법 (1)부터 (3)은 Mathematica 화면에서 잘 모르는 Mathematica 명령어를 직접 자판으로 입력하여 확인해 보는 방법들이고, 또 다른 방법으로는 Help 메뉴를 이용하는 방법이다.



즉, 화면에서 Help 메뉴 안의 맨 위에 있는 Help···를 mouse로 click하여 Help창안의 go to라고 쓰여진 작은 Box에 알고 싶은 명령어를 입력한 후, go to Box 아래를 보면 라디오 버튼을 가진 6가지 항목 중에 Built-in Functions를 선택하고 enter하여 사용하는 방법이다. 이 경우 명령어 입력시 대, 소문자를 구별하지 않는다. 즉, Help메뉴를 선택하여 go to Box안에 solve라고 써넣고 enter하면 찾고자 하는 명령어가 찾아지면서 Solve 명령어가 반전되고, 이 때, Solve를 click하면 Solve의 사용방법 및 예제설명들을 볼 수 있다. 더 발전된(고급사양이 사용된) 예제들을 보고 싶으면 scroll bar를 내려 Further Examples 앞의 세모 (▷)를 click하면 된다.

Solve 명령어에 관한 사항들을 잘 알게 되었는가? 이제 알고자 하는 명령어를 찾는 방법 및 그 명령어의 사용 방법을 알았을 것이다.



지금부터 본격적으로 가장 쉬운 예제로 부터 아주 기본적인 명령어들에 대해 Mathematica 실습을 해보자. 8장에서 다룬 내용들은 보다 심도있는 문제들을 다루기 위해 뒤에서 다시 반복적으로 사용되므로 잘 익혀 두면 많은 도움이 될 것이다.

8.1 기본 명령어

먼저 Mathematica에서 사용하는 기본명령어를 요약하면 다음과 같다.

Mathematica 표기법	의 미	비 고
$a+b$	$a+b$	덧셈
$a-b$	$a-b$	뺄셈
$a*b$[또는 a b(a와 b사이를 띄운다)]	$a \times b$	곱셈
a/b	$\frac{a}{b}$	나눗셈
$a=b$	b를 a에 대입(할당)	
$a=.$ 또는 $Clear[a]$	a에 할당된 값이 제거됨	
$a==b$	a와 b는 같은지 판단함	
Pi	π	예약상수
E	e	예약상수
Infinity	∞	예약상수
I	허수 $i(\sqrt{-1})$	예약상수
5!	$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$	차례곱
a^b	a^b	
수식 // N 또는 N[수식]	주어진 수식의 근사값을 기계정밀도(대부분 16자리수 사용)로 계산하되 6-7자리로 출력함	
N[수식, k]	주어진 수식을 k자리 근사값으로 계산	
$Table[expr, \{i, imin, imax\}]$	expr을 $i = imin$부터 $imax$까지 1씩 증가시키면서 반복 계산하여 목록을 만듦.	
a $!= b$(!앞에 한칸 띄운다)	$a \neq b$	
$x >= 1$	$x \geq 1$	

[주의] Mathematica를 활용하면서 명령어의 양이나 사용방법에 너무 힘들어

하지말고 Help 기능을 최대한 이용하여 사용법을 익혀 나가기 바란다. 명령어는 항상 **동사**[**목적어, 부사(전치사)**]의 형태를 취한다. 예를 들면, **Solve[방정식,변수]**형태이다.

예제 8.1.1 $1+1$을 입력한 뒤 Shift+Enter(입력내용 실행)를 동시에 누르면 In과 Out번호가 자동적으로 정해지면서 실행이 된다.

$$\boldsymbol{In}[1] := \mathbf{1+1}$$

$$Out[1] = 2$$

▣

예제 8.1.2 수학에서 사용하는 상수 $\pi = 3.14159\cdots$를 사용할 수 있다. 단 모든 명령어 또는 예약 상수들의 표기는 대문자로 시작한다.

$$\boldsymbol{Pi/4+3Pi/4}$$

$$\pi$$

▣

예제 8.1.3 다루는 숫자 중에 실수가 있으면 결과도 실수처리가 된다(예를 들면, 정수+실수는 실수로 출력한다). 숫자뒤에 점을 찍으면 실수로 인식한다.

$$\boldsymbol{Pi/4.+Pi/4}$$

$$1.5708$$

▣

예제 8.1.4 π의 값까지 실수로 바꾸려면 N명령어를 사용한다. 즉 계산결과를 수치로 나타나려면 N(Numerical) 명령어를 사용하면 된다.

$$\boldsymbol{N[Pi/4+Pi/4]}$$

$$1.5708$$

▣

예제 8.1.5 $N[\ ]$대신에 명령어 끝에 $//N$을 사용하여도 된다.

$$\boldsymbol{Pi/4+Pi/4\ //N}$$

$$1.5708$$

▣

예제 8.1.6 다음은 명령어 N의 사용법에 대해서 물어본다. 이 때 입력한 내용의 결과에 대해 Out번호는 정해지지 않는다. $N[E,\ 10]$은 E(exponential)의 값을 유효숫자 10자리까지 구해준다.

$$\boldsymbol{?N}$$

```
N[expr] gives the numerical value of expr.  N[expr, n]
attempts to give a result with n-digit precision.
```

예제 8.1.7 Plo로 시작하는 사용가능한 모든 명령어들을 알 수 있다.

?*Plo**

```
Plot Plot3Matrix PlotJoined PlotPoints PlotRegion
Plot3D PlotDivision PlotLabel PlotRange PlotStyle
```

예제 8.1.8 수학 기호들을 사용할 수 있다. 지수는 ^를 사용한다.

(1/1 + 2 * 1 − 0)^4

81

예제 8.1.9 허수 $i(i^2 = -1)$를 사용할 수 있다. 허수 i를 Mathematica에서는 I로 표시한다.

***I*^2**

−1

예제 8.1.10 $n = 1$부터 $n = 10$까지의 $n! = n\ factorial = n*(n-1)*\cdots*2*1$을 구하여라.

***Table*[*n*!, {*n*, 1, 10}]**

{1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800}

예제 8.1.11 보통 과학계산기로 50!정도는 구하나 100!은 구하기 힘들다.

100!

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592\
63895217599993229915608941463976156518286253697920827223758\
251185210916864000000000000000000000000

[실습문제] 1000!, 10000!을 구하여라.

예제 8.1.12 그외 기본명령어들을 실습해 보자. 여기서 =은 우변에 좌변을 대입하라는 것이며, ==은 등호(같다)의 의미이다.

100! //*N*

9.33262×10^{157}

3^250

1906837481167966155897665113712775077012604263491483337437043\
6549108862450339731631563810276462408909764220377785307262 49

3^250 //*N*

1.90684×10^{119}

$\boldsymbol{x = 10;}$

$\boldsymbol{x == 15}$

$False$ ▣

8.2 함수

자주 사용되는 함수와 관련된 Mathematica표기법을 다음 도표에 소개한다.

Mathematica 표기법	의 미	비 고
$f[x\_] = x\hat{}2 + 1$	$f(x) = x^2 + 1$	1변수함수
$f[x\_,\ y\_] = x\hat{}2 + y\hat{}2$	$f(x,\ y) = x^2 + y^2$	2변수함수
$Abs[x]$	$\vert x\vert$	절대값함수
$Sqrt[x]$	$\sqrt{x}$	제곱근함수
$Sin[x], Cos[x], Tan[x]$	$\sin x,\ \cos x,\ \tan x$	삼각함수
$Csc[x], Sec[x], Cot[x]$	$\csc x,\ \sec x,\ \cot x$	삼각함수
$Log[x]$	$\ln x$	자연대수
$Log[a,\ x]$	$\log_a x$	밑이 a인 로그함수
$E\hat{}x$ 또는 $Exp[x]$	e^x	지수함수
$Floor[x]$	$[x]$	가우스함수
$?f$	f의 정의를 알려줌	
$Clear[f]$	f의 입력된 정의를 없애줌	
? 명령어	주어진 명령어에 관한 정보	
?? 명령어	주어진 명령어에 관한 상세한 정보	
$[x\_]$	x는 변수	
{ }	목록	
( )	우선 순위 지정 연산	
명령문;	명령 실행후 결과를 출력 않음	
$Degree$	$\frac{\pi}{180}$	

예제 8.2.1 다음은 함수 $f(x) = ax$를 선언하는 방법이다. 독립변수가 x인 함수 $f(x) = ax$를 선언할 때는 x가 변수임을 인식시키기 위해 $f[x_] = a * x$로 입력한다.

$\boldsymbol{f[x\_] = a * x}$

ax

x함수 선언 뒤에는 함수 값 $f(4) = 4a$를 찾을 수 있다.

$\boldsymbol{f[4]}$

$4\,a$ ▣

[주의] $a * x$를 $a\ x$(a와 x사이 한 칸 띄움)로 써도 된다. Mathematica에서 ax와 $a * x$는 다름에 주의하여라. 또 Mathematica에서 함수의 변수는 [ ]안에 둔다. 예를 들면, $c(1 + x)$는 c와 $1 + x$의 곱이고, $c[1 + x]$는 변수가 $1 + x$인 함수 c이다.

예제 8.2.2 같은 이름 f로 다른 함수를 선언할 때는 먼저 f를 청소해야 한다. 연속해서 명령어를 나열할 때는 명령어 사이는 ; 를 사용(즉, 명령어1 ; 명령어 2 처럼)한다.

$\boldsymbol{Clear[f];}$

$\boldsymbol{f[x\_] = x\hat{}2}$

x^2

이제 $f(4) = 4a$(앞의 예제에서 정의한 함수)가 아니고 16이다.

$\boldsymbol{f[4]}$

16

예제 8.2.3 그외 함수에 관한 명령어들을 실습해 보자. 삼각함수의 독립변수 값은 라디안 값이며, 만약 라디안이 아닌 각도로 독립변수값을 주고 싶으면 $Degree$명령어를 사용한다.

$\boldsymbol{Sqrt[25]}$

5

$\boldsymbol{Sqrt[25]\ //N}$

5.

$\boldsymbol{Exp[10]\ //N}$

22026.5

$\boldsymbol{Log[10, 3]}$

$$\frac{Log[3]}{Log[10]}$$

$\boldsymbol{Sin[Pi/2]}$

1

$\boldsymbol{Tan[45\ \ Degree]}$

1

$\boldsymbol{Tan[45\ \ Degree]//N}$

1

8.3 미분과 적분

미분과 적분에서 사용되는 주요한 Mathematica 명령어는 다음 도표와 같다.

Mathematica 표기법	의 미	비 고
$D[f[x],\ x]$ 또는 $f'[x]$	$f(x)$의 x에 대한 미분, $\frac{df}{dx}$	도함수
$D[f[x],\ \{x,\ n\}]$	$\frac{d^n f}{dx^n}$	n계 도함수
$D[f[x_1,\ x_2, \cdots],\ x_1,\ x_2, \cdots]$	$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots f$	편미분
$Dt[f[x,\ y]]$	$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$	전미분
$Integrate[f[x],\ x]$	$\int f(x)dx$	부정적분
$Integrate[f[x],\ \{x,\ xmin,\ xmax\}]$	$\int_{xmin}^{xmax} f(x)dx$	정적분
$NIntegrate[f[x],\ \{x,\ xmin,\ xmax\}]$	$\int_{xmin}^{xmax} f(x)dx$의 수치 근사 적분	

예제 8.3.1 D : Differentiate(미분하다).

$f(x) = x^2$의 도함수를 구하여라.

```
Clear[f];
f[x_] = x^2;
D[f[x], x]
```

$2x$ ▣

[주의] 함수를 선언한 후 미분을 구한 이유는 한번 선언한 함수를 여러번 사용하는 경우에 편리함을 주기 위함이며, 위의 예제는 미분만을 할 때는 $D[x\hat{}2,\ x]$로 한다.

예제 8.3.2 함수 ax를 x에 관해 부정적분을 구하여라. 이때 적분상수는 나타나지 않는다.

```
Integrate[a * x, x]
```

$\frac{ax^2}{2}$ ▣

예제 8.3.3 구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x) = x^2$의 정적분을 구하여라.

$\boldsymbol{Clear[f];}$

$\boldsymbol{f[x\_] = x\hat{}2;}$

$\boldsymbol{Integrate[f[x], \{x,\ -1,\ 1\}]}$

$\frac{2}{3}$ ▣

예제 8.3.4 그외 미분 및 적분 명령어들을 실습해 보자.

$\boldsymbol{D[x\ Cos[x],\ x]}$

$Cos[x] - x\ Sin[x]$

$\boldsymbol{Integrate[Sin[x]\hat{}5,\ x]}$

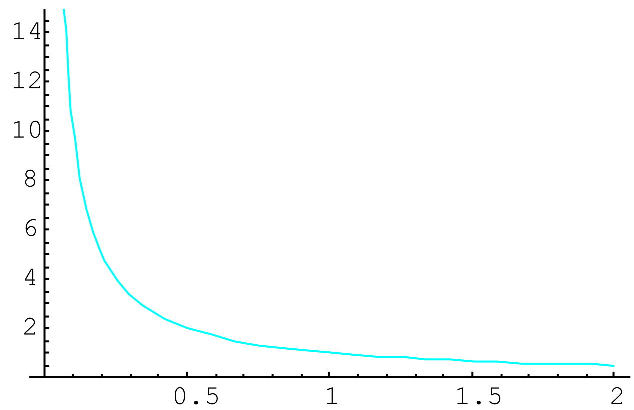
$\frac{1}{240}(-150\,Cos[x] + 25\,Cos[3\,x] - 3\,Cos[5\,x])$

$\boldsymbol{Integrate[1/x,\ \{x,\ 0,\ 1\}]}$

$Integrate :: idiv\ :\ Integral\ of\ \frac{1}{x}\ does\ not\ converge\ on\ \{0,\ 1\}.$

$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

$\boldsymbol{Plot[1/x,\ \{x,\ 0,\ 2\},\ PlotRange -> \{0,\ 15\}];}$



$\boldsymbol{Integrate[1/x,\ \{x,\ 0.1,\ 1\}]}$

2.30259 ▣

8.4 극한

수열 및 함수의 극한에 관한 Mathematica 명령어를 소개한다.

Mathematica 표기법	의 미	비 고
$Limit[f[x],\ x->\ x_0]$	$\lim_{x\to x_0} f(x)$	
$Limit[f[x],\ x->\ x_0,$ $Direction->\ 1]$	$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$	좌극한
$Limit[f[x],\ x->\ x_0,$ $Direction->\ -1]$	$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$	우극한
$NLimit[f[x],\ x->\ x_0]$	$\lim_{x\to x_0} f(x)$의 수치 근사 극한	

예제 8.4.1 x가 무한대로 갈 때, 함수 $\frac{1}{x}$의 극한을 구하여라. 무한대는 Infinity로 표기한다.

$\boldsymbol{Limit[1/x,\ x->\ Infinity]}$

0 ▣

예제 8.4.2 좌극한은 $Direction->1$(또는 $Direction->$ 양수)을 이용하여 구하고, 우극한은 $Direction->-1$(또는 $Direction->$ 음수)을 이용하여 구한다.

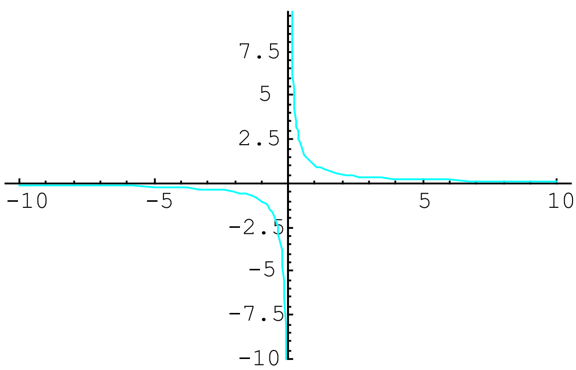
$\boldsymbol{Limit[1/x,\ x->\ 0,\ Direction->\ 1]}$

$-\infty$

$\boldsymbol{Limit[1/x,\ x->\ 0,\ Direction->\ -1]}$

∞

$\boldsymbol{Plot[1/x,\ \{x,\ -10,\ 10\}];}$



▣

8.5 대수

Mathematica를 사용할 때 종종 앞의 결과를 그대로 이용할 필요가 많이 생긴다. 이러한 경우에 사용되는 명령어가 "%"이다. 이 기호의 사용법과 대수식의 계산에 사용되는 Mathematica 명령어를 다음 도표에 소개한다.

Mathematica 표기법	의 미	비 고
%	바로 앞의 결과 표시	출력결과 이용
%%···% (k번)	마지막에서 k번째 결과 표시	출력결과 이용
$\%n$ 또는 $Out[n]$	n번째 식의 결과 표시	출력결과 이용
$Expand$[수식]	주어진 수식을 전개	
$Factor$[수식]	주어진 수식을 인수분해	
$Together$[유리식]	주어진 유리식을 통분	
$Simplify$[수식]	주어진 수식을 단순화시켜 최소개수의 항으로 만듬	
$Collect$[수식, 변수명]	주어진 수식을 주어진 변수명에 대해 정리	
$Sum[f(i),\ \{i,\ a,\ b\}]$	$\sum_{i=a}^{b} f(i)$	합
$NSum[f(i),\ \{i,\ a,\ b\}]$	$\sum_{i=a}^{b} f(i)$의 근사 수치 합	합의 근사치
$Solve$[좌변 == 우변, x]	주어진 방정식을 x에 관해 푼다.	방정식 풀이
$NSolve$[좌변 == 우변, x]	x에 관한 방정식 (좌변 = 우변)의 근사해를 구함	
수식//$Short$ 또는 $Short$[수식]	수식의 1행 출력, 결과물이 긴 경우 중간항들이 생략되고 한행에 출력	

예제 8.5.1 Expand = 전개하다.

$$\boldsymbol{Expand}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\hat{\ }\mathbf{3}]$$

$$a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3$$

Factor = 인수분해하다. %는 바로 전 Out를 나타낸다.

$$\boldsymbol{Factor}[\%]$$

$$(a+b)^3$$

예제 8.5.2 합 $1+2+3+\cdots+100$을 구하여라.

$$\boldsymbol{Sum}[\boldsymbol{i},\ \{\boldsymbol{i},\ \mathbf{1},\ \mathbf{100}\}]$$

5050

무한합의 경우 Sum을 NSum으로 바꿔 실행해 보자.

$$\boldsymbol{NSum}[\mathbf{1}/\boldsymbol{n}\hat{\ }\mathbf{2},\ \{\boldsymbol{n},\ \mathbf{1},\ \boldsymbol{Infinity}\}]$$

1.64493

예제 8.5.3 *Solve*는 방정식의 해를 구한다. 4차방정식까지 근의 공식이 알려져 있다. 다음은 2차방정식의 근의 공식을 알려 준다. 방정식을 표현할 때는 등호 2개(==)를 사용하여야 한다.

$$\boldsymbol{Solve}[\boldsymbol{a}*\boldsymbol{x}\hat{\ }\mathbf{2}+\boldsymbol{b}*\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}==\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{x\to\frac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\},\{x\to\frac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\}\}$$

[실습문제] 3차방정식과 4차방정식의 일반해를 구하여라.

예제 8.5.4 $//Short$는 Output을 간략히 보여 준다. $<<97>>$은 사이에 97개의 항이 있음을 의미한다.

$$\boldsymbol{Solve}[\boldsymbol{x}\hat{\ }\mathbf{100}-\mathbf{1}==\mathbf{0},\boldsymbol{x}]\ //\boldsymbol{Short}$$

$$//short=$$

$$\{\{x->\ -1\},\ \{x->\ -I\},\ <<97>>,\ \{x->\ (-1)^{49/50}\}\}$$

[주의] 스크린의 여백에 따라 출력형태가 달라질 수 있다.

예제 8.5.5 유리식에 관한 명령어들을 실습하여라.

$$\boldsymbol{expr}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})\hat{\ }\mathbf{2}/((\mathbf{1}+\boldsymbol{x})(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}\hat{\ }\mathbf{2})\hat{\ }\mathbf{2})$$

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x)\,(1+x^2)^2}$$

Expand[***expr***]

$$\frac{1}{(1+x)\,(1+x^2)^2}-\frac{2\,x}{(1+x)\,(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x)\,(1+x^2)^2}$$

ExpandAll[***expr***]

$$\frac{1}{1+x+2\,x^2+2\,x^3+x^4+x^5}-\frac{2\,x}{1+x+2\,x^2+2\,x^3+x^4+x^5}$$
$$+\frac{x^2}{1+x+2\,x^2+2\,x^3+x^4+x^5}$$

Together[%]

$$\frac{1-2\,x+x^2}{1+x+2\,x^2+2\,x^3+x^4+x^5}$$

Apart[%]

$$\frac{1}{1+x}+\frac{-1-x}{(1+x^2)^2}+\frac{1-x}{1+x^2}$$

Simplify[%]

$$\frac{(-1+x)^2}{(1+x)\,(1+x^2)^2}$$

▣

8.6 벡터 및 행렬

벡터와 행렬은 목록(list)을 표시하는 것과 같이 중괄호 { }를 이용하여 표현하며, 행렬의 각 행은 다시 { }를 사용하여 나타낸다. 기본적인 명령어를 소개하면 다음과 같다.

Mathematica 표기법	의　　　　미	비 고
$v = \{a,\ b,\ c\}$	벡터 $v = \{a,\ b,\ c\}$	
$A = \{\{a,\ b\},\ \{c,\ d\}\}$	행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	
$Det[A]$	주어진 정방행렬 A의 행렬식	$\lvert A \rvert$
$Inverse[A]$	주어진 정방행렬 A의 역행렬	A^{-1}
$Transpose[M]$	주어진 행렬 M의 전치행렬	
$//MatrixForm$ 또는 $MatrixForm[]$	목록을 행렬형태로 출력함	

예제 8.6.1 벡터 $\mathbf{v}_1 = (0,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,\ 1,\ 1)$에 대하여 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $-\mathbf{v}_1$ 을 구하여라.

[풀이]

$\boldsymbol{v1 = \{0,\ 1,\ 2\};}$

$\boldsymbol{v2 = \{2,\ 1,\ 0\};}$

$\boldsymbol{v3 = \{1,\ 1,\ 1\};}$

$\boldsymbol{v1 + v2 + v3}$

$\{3,\ 3,\ 3\}$

$\boldsymbol{v1 + v2}$

$\{2,\ 2,\ 2\}$

$\boldsymbol{v1 - v2}$

$\{-2,\ 0,\ 2\}$

$\boldsymbol{-1 * v1}$

$\{0,\ -1,\ -2\}$ ▣

예제 8.6.2 행렬 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$을 표현하여라.

[풀이] 위 예제 8.6.1에서 선언한 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$를 이용하자.

$\boldsymbol{M = \{v1,\ v2,\ v3\}}$

$\{\{0,\ 1,\ 2\},\ \{2,\ 1,\ 0\},\ \{1,\ 1,\ 1\}\}$

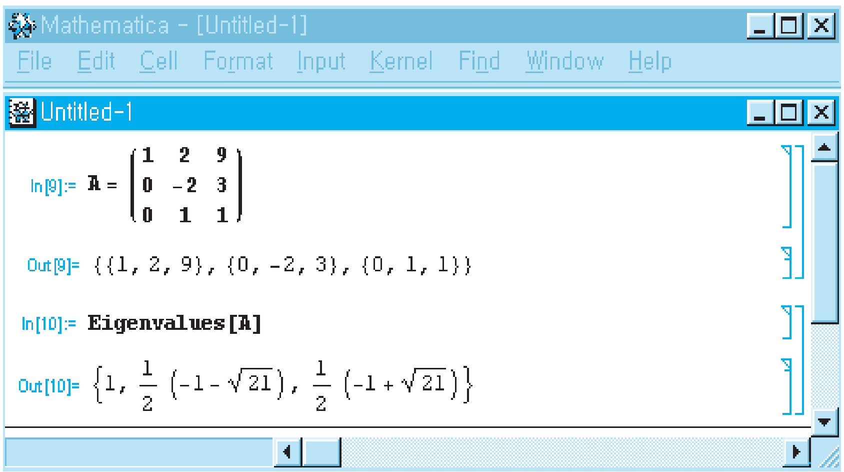
M에 MatrixForm 명령어를 사용해 보자. MatrixForm은 계산 결과를 행렬형태로 보여 준다.

$\boldsymbol{MatrixForm}[\boldsymbol{M}]$

$//MatrixForm =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ▣

[참고]



(1) Input 메뉴의 Create Table/Matrix/Pallette ⋯ 기능을 이용하여 3×3행렬을 만들 수 있다. Matrix를 선택하고 행의 수(number of rows)에 3, 열의 수(number of columns)에 3을 입력하고 OK를 누르면 MatrixForm을 실행한 상태와 같이 3 × 3행렬의 틀이 만들어 진다. 위의 그림을 참조하여라. 이 때, mouse를 행렬안의 작은 네모위에 가져가서 click한 다음에, 행렬의 성분들을 입력하여라. 입력위치를 옮길 때는 mouse를 이용하거나 Tab키를 사용한다.

(2) 만약 Mathematica를 사용할 때 Cell 메뉴에서 Default Output FormatType을 TraditionalForm으로 설정하였다면, MatrixForm 명령어는 사용할 필요가 없다. 이 책의 Input FormatType과 Output FormatType은 StandardForm으로 설정되었다.

예제 8.6.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하여라.

[풀이]

$\boldsymbol{Clear}[\boldsymbol{A}]$;

$\boldsymbol{A} = \{\{2,\ 1,\ 2\},\ \{3,\ 2,\ 2\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$;

$\boldsymbol{A//MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{MatrixForm}[\boldsymbol{Inverse}[\boldsymbol{A}]]$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

▣

예제 8.6.4 다음 행렬식의 값을 구하여라.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

[풀이] a_{11}의 표현을 Mathematica에서는 $a11$으로 하자.

$\boldsymbol{Clear[A];}$

$\boldsymbol{A = \{\{a11,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \{0,\ 0,\ a23,\ 0\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ a34\},\ \{0,\ a42,\ 0,\ 0\}\};}$

$\boldsymbol{A//MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} a11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a34 \\ 0 & a42 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Det[A]}$

$a11\ a23\ a34\ a42$ ▣

8.7 그림

Mathematica의 기능 중 가장 시각적이며, 사용자를 감탄하게 만드는 부분이 Graphics(그림) 기능이다. 이 부분의 명령어는 굉장히 많으며, 또 Options(선택사항)에 관한 사항도 엄청난 양이다. 그러나 이것들을 외워야 한다고 생각하면 Mathematica가 싫어질 것이므로 자주 Mathematica를 사용하면서 자연스럽게 친숙해 지길 바란다.

Graphics에 관한 명령어를 요약하면 다음과 같다.

Mathematica 표기법	의 미	비 고
$Plot[f[x],\ \{x,\ xmin,\ xmax\}]$	범위 $[xmin,\ xmax]$에서 $f(x)$의 그래프를 그림	곡선의 그래프
$Plot[\{f1[x],\ f2[x],\cdots\},\ \{x,\ xmin,\ xmax\}$, 선택사항]	범위 $[xmin,\ xmax]$에서 $f1(x), f2(x), \cdots$의 그래프를 선택사항을 첨가하여 모두 한 축에 함께 그림	여러 곡선의 그래프
그래픽 명령어[ ];	그래프의 그림 밑에 $-Graphics-$를 출력하지 않음	
$ListPlot[\{y1,\ \ y2,\cdots\}$, 선택사항]	좌표 $(1,\ y1),\ (2,\ y2),\cdots$에 대응하는 점을 선택사항을 첨가하여 찍음	목록의 그래프
$ListPlot[\{\{x1,\ \ y1\},\ \{x2,\ y2\},\cdots\}$, 선택사항]	좌표 $(x1,\ y1),\ (x2,\ y2),\cdots$에 대응하는 점을 선택사항을 넣어 찍음	목록의 그래프
$Plot3D[f[x,\ y],\ \{x,\ xmin,\ xmax\},\ \{y,\ ymin,\ ymax\}$, 선택사항]	x의 범위가 $[xmin,\ xmax]$, y의 범위가 $[ymin,\ ymax]$일 때, 함수 $f(x,\ y)$의 그래프를 선택사항에서 그림	곡면의 그래프
$ParametricPlot[\{f(t),\ g(t)\},\ \{t,\ t1,\ t2\}]$	t의 범위 $[t1,\ t2]$에서 매개변수방정식 $x=f(t),\ y=g(t)$의 그래프를 그림	매개변수방정식 그래프
$PolarPlot[f[t],\ \{t,\ tmin,\ tmax\}]$	각도 t의 범위 $[tmin,\ tmax]$에서 극방정식 $r=f(t)$의 그래프를 그림	극 방정식 그래프

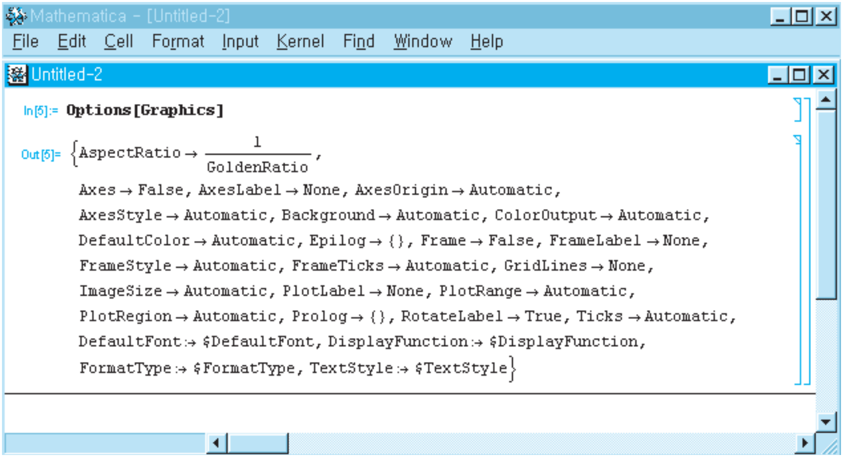
그리고 Graphics부분에서 많이 쓰이는 선택사항(options)은 다음과 같다.

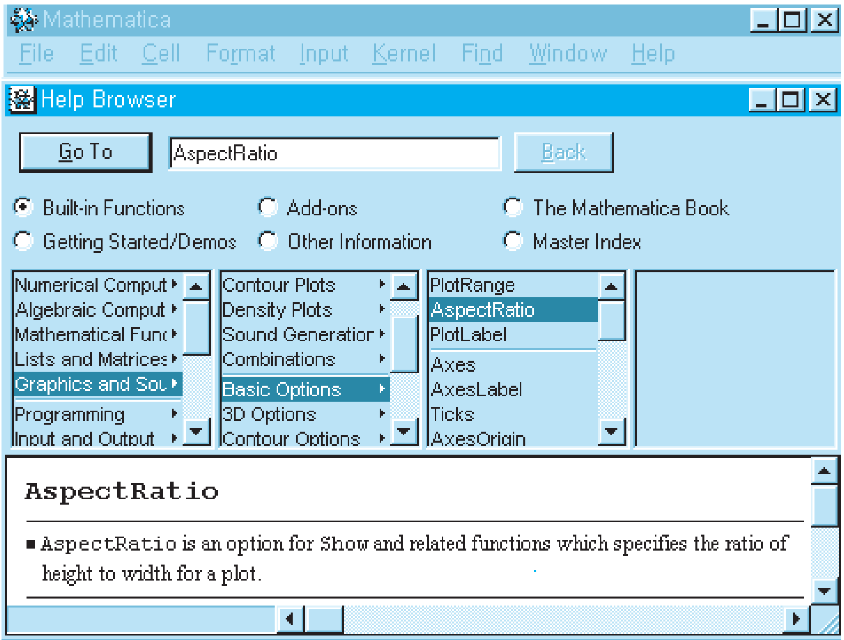
선 택 사 항	내 용	비 고
$Hue[h]$	색상조절	h는 0이상 1이하의 수
$RGBColor[r,\ g,\ b]$	빨강, 초록, 파랑의 적당한 배합을 뜻함	Red, Green, Blue
$PointSize[r]$	점을 반경 r(=전체에 대한 비)인 원형으로 찍음	r는 0이상 1이하의 수
$AbsolutePointSize[d]$	점을 반경 d인 원형으로 만듬	
$Thickness[r]$	선의 두께가 r(=전체에 대한 비)임	r는 0이상 1이하의 수
$AbsoluteThickness[d]$	선의 두께가 d포인터임	
$Dashing[\{r1,\ r2, \cdots\}]$	길이가 $r1,\ r2,\ \cdots$인 파선	
$AbsoluteDashing[\{d1, d2, \cdots\}]$	길이가 $d1,\ d2,\ \cdots$포인터인 파선	
$AspectRatio$	그래프의 가로 : 세로 비율	
$AxesLabel$	좌표축의 이름 지정	
$PlotPoints -> n$	x축 y축에서 각각 n개의 sample을 계산한다.	

[주의] 그래프를 그려놓고 그려진 그래프의 선택사항(options)을 알아서 그래프의 모양을 잘내고 싶으면 Help 기능을 이용하면 된다. 그리고 현재 사용한 명령어의 기본 선택사항들이 무엇인지 알고 싶으면 다음과 같이 하여라. 예를 들어 Mathematica 실행창에서

Options[**Graphics**]

를 입력하고 실행하면 명령어 Graphics에 대한 기본 선택사항들을 볼 수 있다.

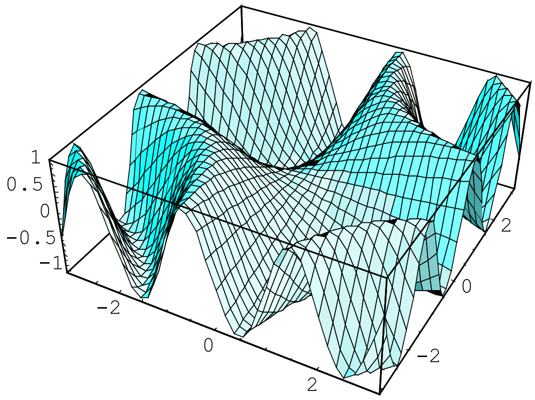




예제 8.7.1 영역 $[-\pi,\ \pi] \times [-\pi,\ \pi]$에서 곡면 $\sin(xy)$를 그려라.

[풀이] 2변수 함수의 3차원 그래프는 $Plot3D$를 사용하며 이 때, 주어진 함수가 2변수이므로 구간이 각각 주어져야 한다.

$$\boldsymbol{Plot3D[Sin[x * y],\ \{x,\ -Pi,\ Pi\},\ \{y,\ -Pi,\ Pi\}];}$$



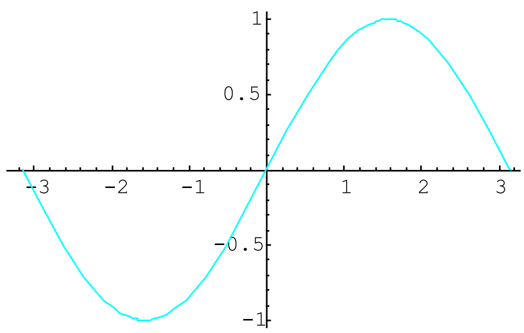
▣

[참고] 그래프를 그리는 명령어 뒤의 ;은 출력결과 ($''Graphics''$)를 나타내지 않는다. Mathematica에서 명령어 뒤의 ;의 기능은 실행은 하되 출력결과를 화면에 나타내지 않는 것인데 그래프를 그리는 명령어의 경우에 출력결과는 그림이 아니고 그림 아래에 나타난 ($''Graphics''$)임에 유의하라.

예제 8.7.2 구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 함수 $\sin(x)$를 그려라.

[풀이] 이차원 그래프는 $Plot$을 사용하며 Mathematica에서 사인(sine)함수는 $Sin[x]$를 입력해야 함에 유의하라.

$\boldsymbol{Plot[Sin[x],\ \{x,\ -Pi,\ Pi\}];}$



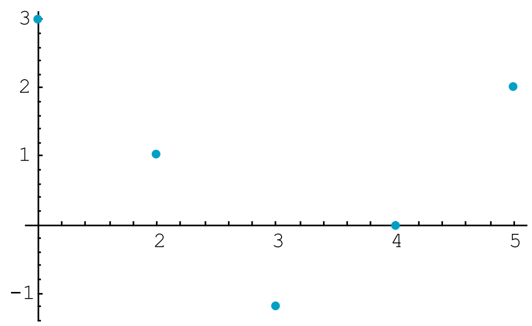
▣

예제 8.7.3 점 $(1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (3,\ -1.3),\ (4,\ 0),\ (5,\ 2)$를 평면에 나타내어라.

[풀이] $ListPlot$는 직교좌표로 주어진 $(x,\ y)$ 좌표점들을 이차원 평면에 그린다. $AbsolutePointSize[4]$는 점의 크기를 실제보다 4배가 되게 한다.

$\boldsymbol{ListPlot[\{\{1,\ 3\},\ \{2,\ 1\},\ \{3,\ -1.3\},\ \{4,\ 0\},\ \{5,\ 2\}\},}$

$\boldsymbol{PlotStyle -> AbsolutePointSize}[4]];$



▣

[참고] 만약 x좌표가 위의 예제처럼 $1,\ 2,\ 3, \cdots$일 경우에는 x좌표를 생략할 수 있다. 즉

$\boldsymbol{ListPlot}[\{\mathbf{3,\ 1,\ -1.3,\ 0, 2}\},$

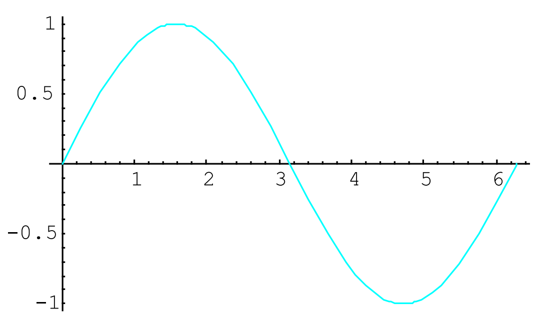
$\boldsymbol{PlotStyle -> AbsolutePointSize}[\mathbf{2}]];$

을 실행해도 같은 결과를 얻는다.

예제 8.7.4 x, y 좌표축이 만나는 점을 $(\frac{\pi}{2},\ 0)$으로 해서 $\sin x$의 그래프를 그리되 그래프의 이름을 Graph of Sine으로 붙이고 각 축의 이름을 X, Y로 표시하여라.

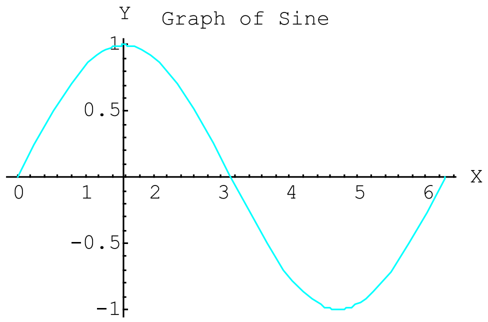
[풀이] 두 축이 만나는 점은 $AxesOrigin$으로 설정하며 $PlotLabel$을 이용하여 그래프의 제목을 붙이고 $AxesLabel$로 축의 이름을 정한다.

$\boldsymbol{Plot}[\boldsymbol{Sin}[\boldsymbol{x}],\ \{\boldsymbol{x},\ \mathbf{0},\ \mathbf{2}\boldsymbol{Pi}\}];$



$\boldsymbol{Plot}[\boldsymbol{Sin}[\boldsymbol{x}],\ \{\boldsymbol{x},\ \mathbf{0},\ \mathbf{2}\boldsymbol{Pi}\},\ \boldsymbol{AxesOrigin -> \{Pi/2,\ 0\}},$

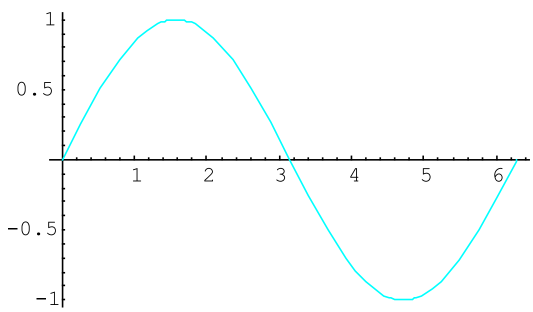
$\boldsymbol{PlotLabel ->'' Graph\,of\,Sine'',\ AxesLabel -> \{''X'',\ ''Y''\}};$



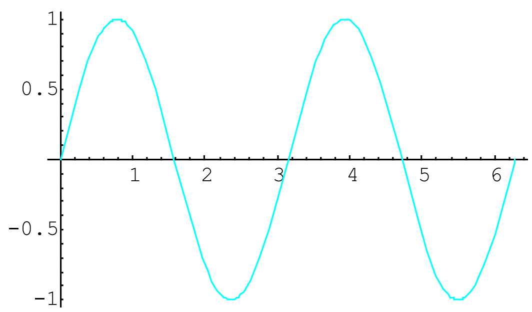
예제 8.7.5 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$의 그래프들을 한 좌표축위에 같이 나타내어라.

[풀이]

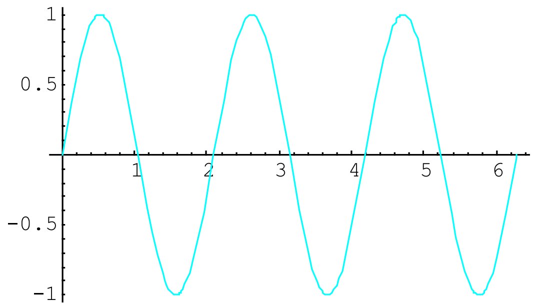
$$\boldsymbol{a1 = Plot[Sin[x],\ \{x,\ 0,\ 2Pi\}];}$$



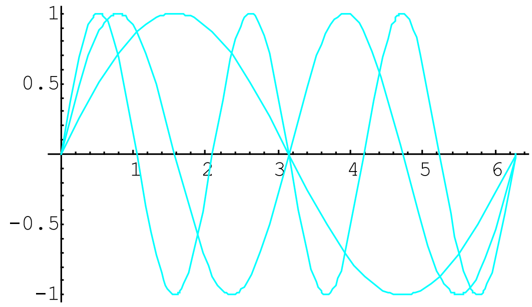
$$\boldsymbol{a2 = Plot[Sin[2x],\ \{x,\ 0,\ 2Pi\}];}$$



$$\boldsymbol{a3 = Plot[Sin[3x],\ \{x,\ 0,\ 2Pi\}];}$$

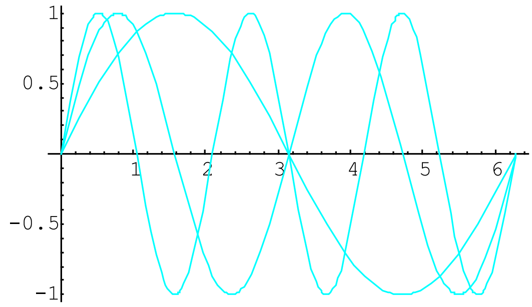


Show[***a*1, *a*2, *a*3**];



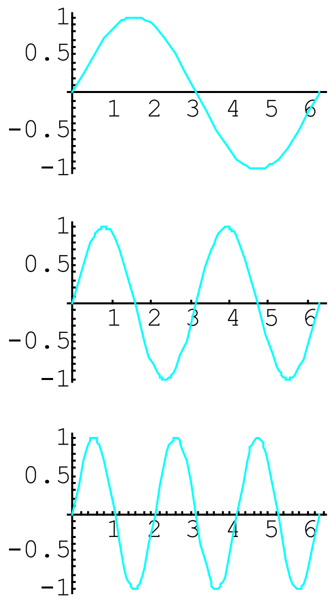
위에서 했던 작업을 다음처럼 해도 된다. 즉 그리고자 하는 함수들을 { }로 묶어 주면 여러개의 함수의 그래프를 한 축에 그릴 수 있다.

Plot[{***Sin***[*x*], ***Sin***[**2*x***], ***Sin***[**3*x***]}, {*x*, **0**, **2*Pi***}];



또, *GraphicsArray*를 이용하여 그림들을 재배열할 수도 있다.

Show[***GraphicsArray***[{{***a*1**}, {***a*2**}, {***a*3**}}]];

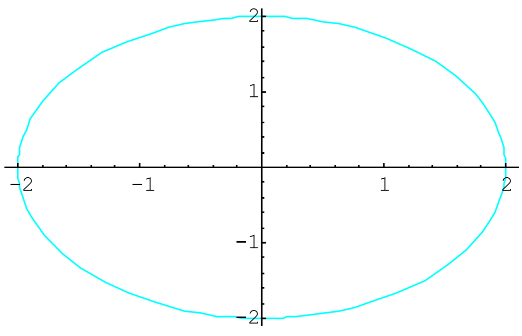


▣

예제 8.7.6 중심이 (0, 0)이고 반경이 2인 원을 그려라.

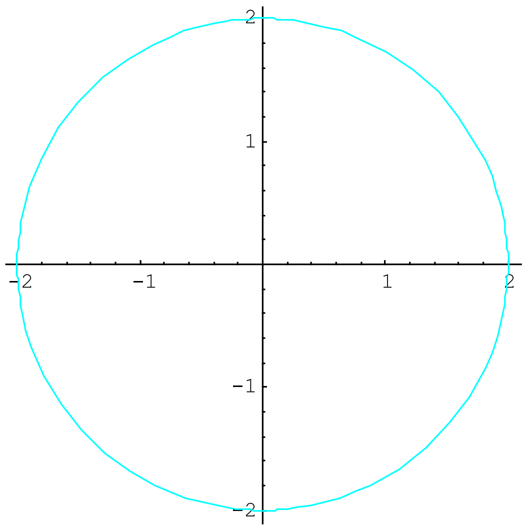
[풀이]

$$a = ParametricPlot[\{2Sin[t],\ 2Cos[t]\},\ \{t,\ 0,\ 2Pi\}];$$



이것은 가로와 세로 축의 길이의 비가 1 : 1이 아니기 때문에 원처럼 보이지 않는다. 이럴 경우에 다음과 같이 하면 된다.

$$Show[a,\ AspectRatio -> \ Automatic];$$



▣

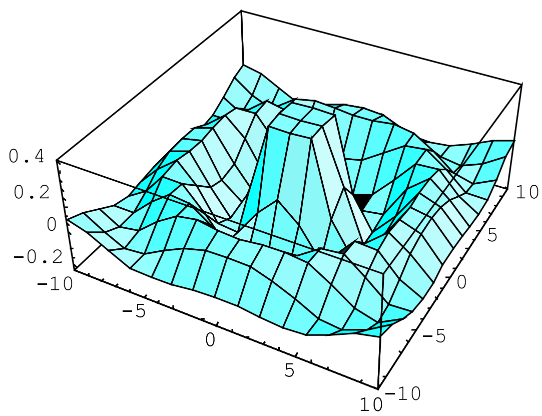
예제 8.7.7 영역 $[-10, 10] \times [-10, 10]$에서 곡면 $\dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$을 그려라.

[풀이]

$\boldsymbol{r = Sqrt[x\verb|^|2 + y\verb|^|2]}$

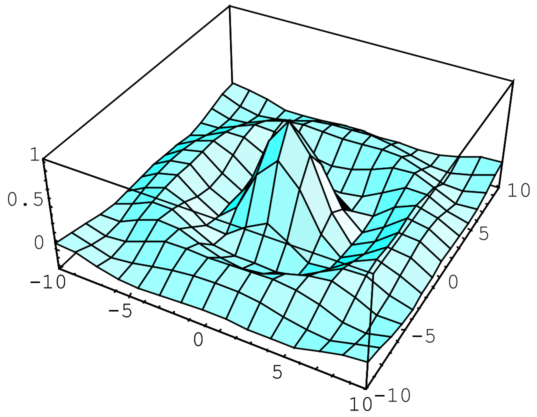
$\sqrt{x^2+y^2}$

$\boldsymbol{b = Plot3D[Sin[r]/r, \{x, -10, 10\}, \{y, -10, 10\}];}$



그려진 그래프의 일부분이 잘렸을 때나 그리고자 하는 그림의 영역을 지정하는 경우에는 *PlotRange*로 조절한다. 위의 봉우리가 완전한 모양인지 알아보기 위해 다음처럼 해보자.

$\boldsymbol{Show[b, PlotRange -> All];}$

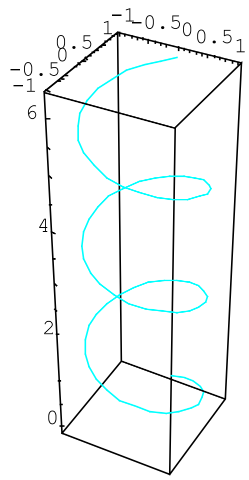


▣

예제 8.7.8 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 나선(helix) $(\sin(3t), \cos(3t),\ t)$를 그려라.

[풀이]

$$\boldsymbol{ParametricPlot3D[\{Sin[3t],\ Cos[3t],\ t\},\ \{t,\ 0,\ 2Pi\}];}$$

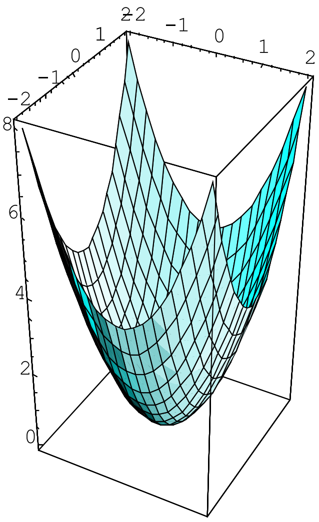


▣

예제 8.7.9 영역 $[-2,\ 2] \times [-2,\ 2]$에서 포물면 $z = x^2 + y^2$을 $Plot3D$가 아닌 $ParametricPlot3D$로 그려라.

[풀이]

$\boldsymbol{ParametricPlot3D[\{x,\ y,\ x\hat{}2 + y\hat{}2\},\ \{x,\ -2,\ 2\},\ \{y,\ -2,\ 2\}];}$



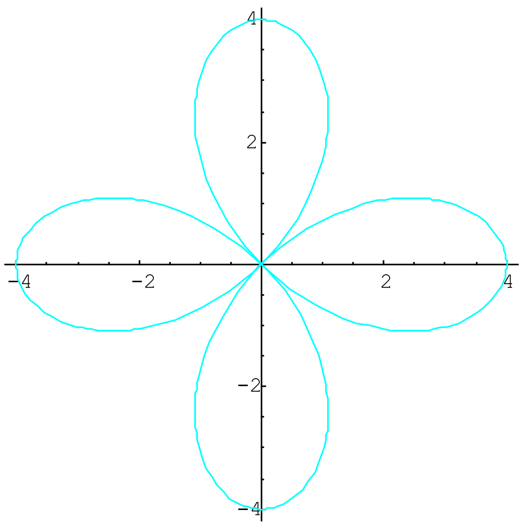
▣

예제 8.7.10 극 방정식으로 주어진 **4엽장미** $r = 4\cos 2\theta$의 그래프를 $[0,\ 2\pi]$에서 그려라.

[풀이] 극 방정식을 그릴 때는 먼저 관련된 Package를 열어야 한다. Package에 대한 설명은 아래의 참고를 보아라. 4엽장미를 그려 보자.

$<<$ ***Graphics`Graphics`***

$\boldsymbol{PolarPlot[4 * Cos[2t],\ \{t, 0, 2Pi\}];}$



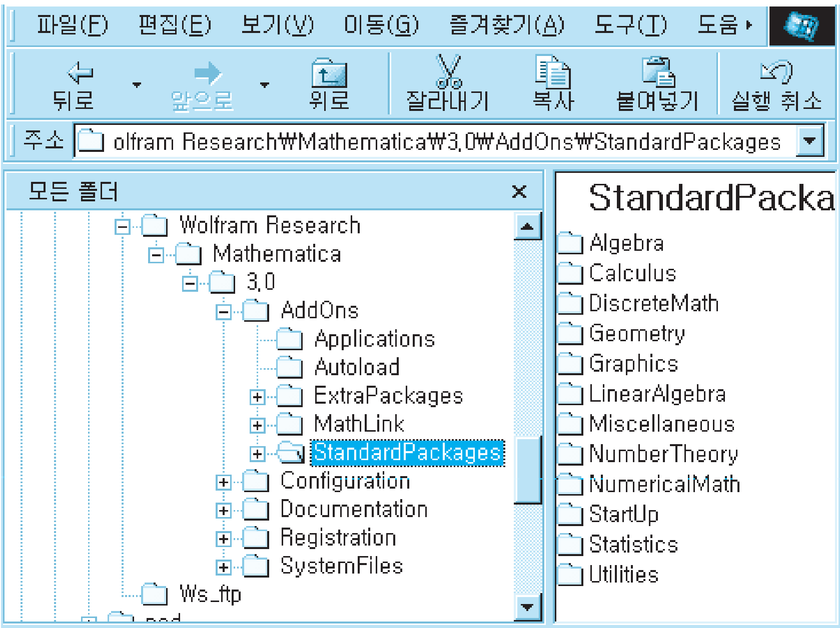
▣

[참고] Mathematica와 함께 제공되는 Mathematica Package들은 좀 더 세분된 응

용분야에 따라 Mathematica directory안에서 각각 다른 파일로 나누어져 Extra Package 2개, Standard Package 12개로 정리되어 있으며, 해당 Package를 부를 때는

<< **디렉토리명‘Package명‘**

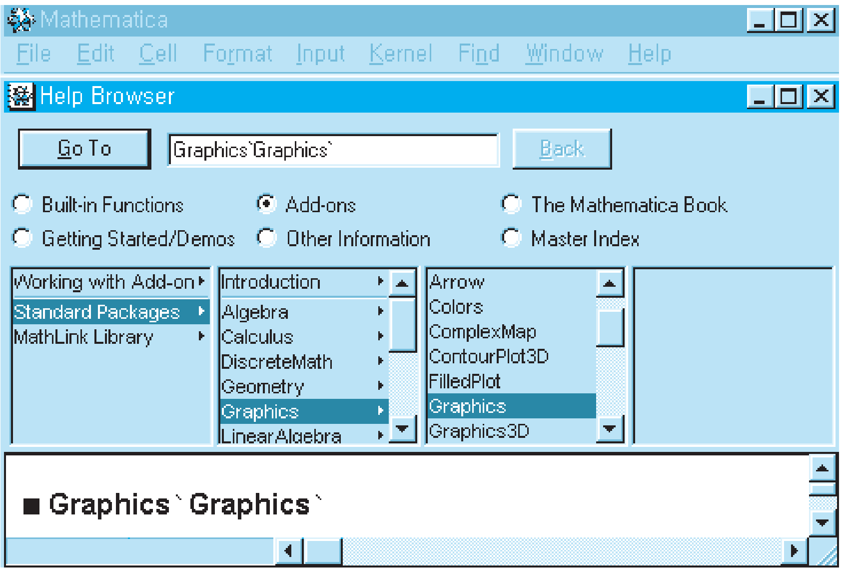
의 형식을 취한다. ‘**은 Esc키 밑의 역인용 부호임에 주의**하여라. Mathematica를 사용하면서 가장 다루기 까다로운 부분이 Package란 용어와 그 사용방법이다. 쉽게 설명을 하면 Package란 묶여있는 하나의 복주머니이다. 평소에 많이 사용되지 않는 내용이나 특별한 부분에만 사용되는 명령어들은 각각의 이름이 붙여진 복주머니속에 들어가 있으며, 이 복주머니들은 Mathematica를 실행해도 묶여있다가, 자기 이름이 불려질 때만 묶여진 주머니를 풀고 나와 그 안에 있는 명령어를 실행하라는 명령어가 내려지면 드디어 실행을 한다. 위의 예처럼, PolarPlot이라는 명령어는



$$<< \textbf{Graphics`Graphics`}$$

를 입력한 다음에 사용해야 한다. 그냥 사용하면 원하는 극그래프를 얻을 수가 없다. 그렇다면 PolarPlot라는 명령어가 Package에 들어 있는지 어떤지, 그리고 어떤 Package안에 들어 있는지를 아는 방법은 무엇이겠는가? Windows 탐색기를 이용하여 Mathematica directory안에 있는 Add-ons directory를 열어보아라. Package들의 이름이 보일 것이다.

또 다른 방법으로는 **Help메뉴**를 열어 6가지 항목 중에서 **Add-ons 항목**을 선택하고 첫째 Box안에서 **Standard Packages**를 click해 보아라. 그러면 PolarPlot이 들어 있는 Graphics Package를 포함하여 그 Package에 들어있는 다른 명령어들도 볼 수 있을 것이다. 이것 저것 Package 안에 들어있는 명령어들을 살펴보면서 앞으로 많이 사용하게 되는 Package에 대한 예비지식을 준비하도록 하자.

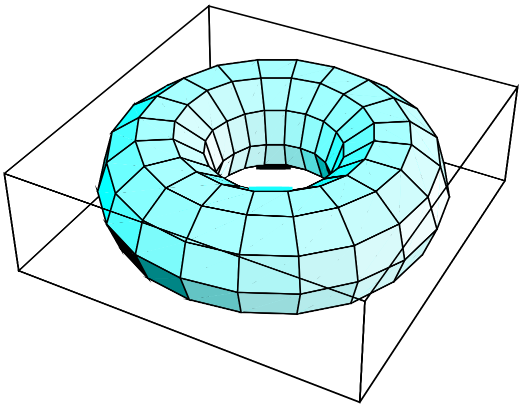


예제 8.7.11 윤환면(torus)과 뫼비우스띠를 그려라.

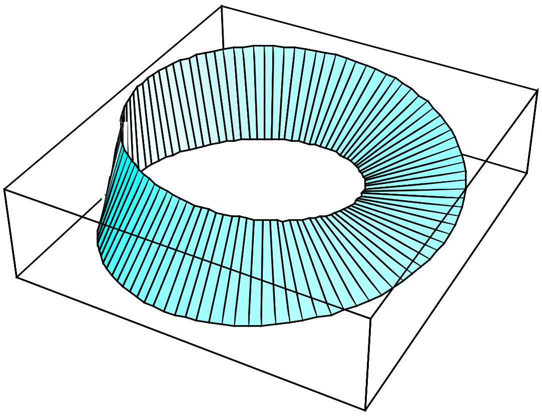
[풀이] 윤환면(torus)이나 뫼비우스띠(Moebius band) 등은 *Graphics`Shapes`* Package안에 그려져 있다. 그래서 불러오기만 하면 된다.

$$<< \textit{Graphics`Shapes`}$$

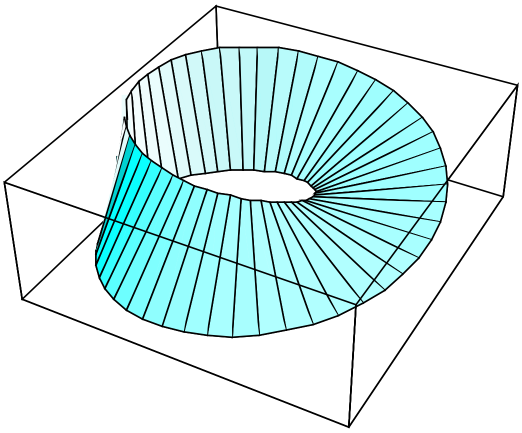
$$\textit{Show}[\textit{Graphics3D}[\textit{Torus}[\,]]];$$



$Show[Graphics3D[MoebiusStrip[3,\ 1,\ 100]]];$



$Show[Graphics3D[MoebiusStrip[2,\ 1,\ 50]]];$



▣

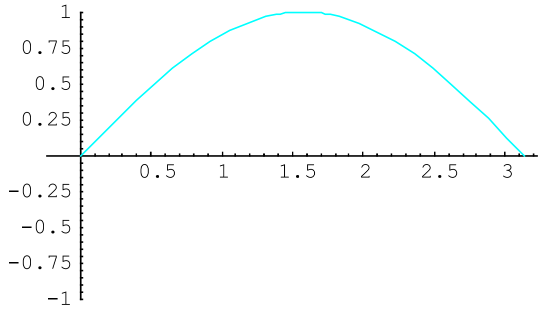
예제 8.7.12 t가 0에서 2π까지 0.25간격으로 주어질 때 곡선 $u(x,\ t) = \sin x\ \cos t$ 이 변화되는 모습을 구간 $[0,\ \pi]$에서 그려라.

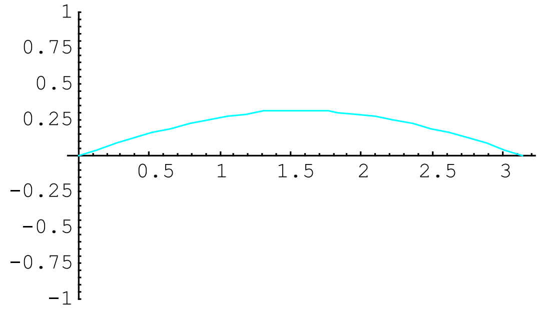
[풀이] 실행 결과는 지면관계상 여러 개의 그래픽 중에서 일부분만 실었다.

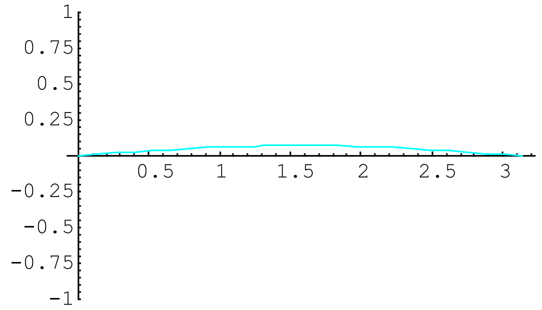
$\boldsymbol{u[x\_,\ t\_] = Sin[x]\ Cos[t];}$

$\boldsymbol{Table[Plot[u[x,\ t],\ \{x,\ 0,\ Pi\},}$

$\boldsymbol{PlotRange - > \{-1,\ 1\}],\ \{t,\ 0,\ 2Pi,\ 0.25\}];}$







▣

위의 명령어는 곡선의 모양이 변하는 모습을 연속적으로 보이게 한다. 이 명령을 실행 후 그려진 화면 상의 모든 그림들을 포함하는 긴 cell을 선택한 다음, 그림들 중의 하나를 click하면 그림 둘레에 선이 생긴다. 이 때, 그 그림을 두 번 click하면 방금 그려진 전체 그림들의 변하는 모습(animation)을 한 눈에 볼 수

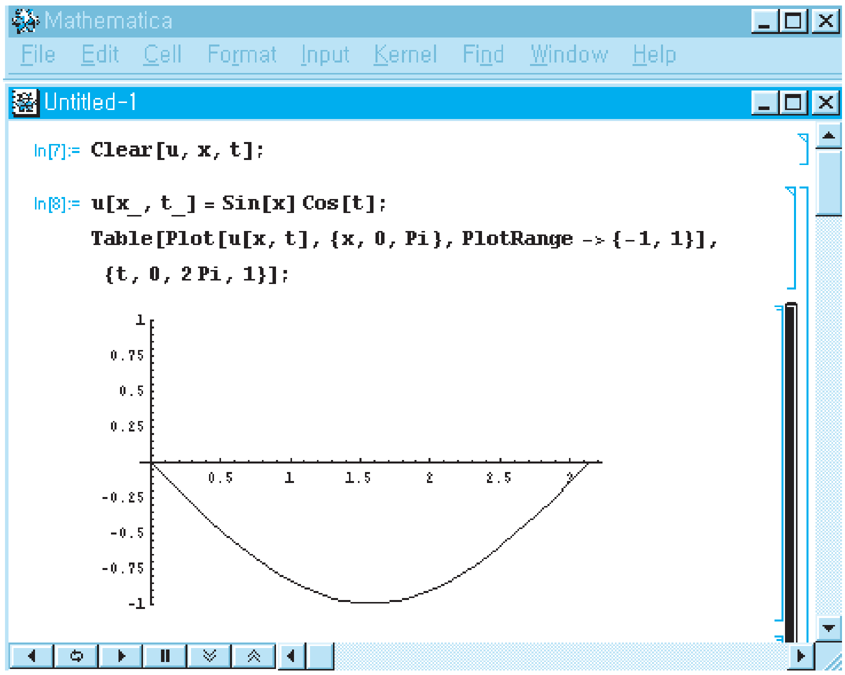
있다. animation에 대한 것은 다음의 8.8절을 보아라.

[실습문제] 다음을 실행하여라.

$$Table[Plot3D[Sin[3Pi*x]Sin[2Pi*y]Cos[Pi*t], \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\},$$
$$PlotRange -> \{-1, 1\}], \{t, 0, 1, 0.1\}];$$

[주의] 명령어는 항상 **동사** [**목적어, 부사(전치사)**]의 형태를 취함에 주목하여라.

[실습문제] $\cos xy$의 입체를 그려보아라.



8.8 애니메이션

Mathematica에서 사용되는 그래픽의 animation에 관한 명령어에 대해 알아보자. 아래의 명령어들을 실행한 결과는 지면 관계상 생략하지만 독자들은 반드시 실행해 보기 바란다. 역동적으로 움직이는 그림들을 보고 있으면 Mathematica를 배우면서 고생한 보람을 느낄 것이다. 실행한 그래픽들을 모두 포함하는 전체 cell (또는 group cell)을 선택한 다음 화면에 나타난 한 그래픽을 선택하여 두 번 click하면 전체 그래픽의 animation을 볼 수 있다. animation의 속도와 방향은 오디오 시스템에 있는 것과 같은 화면 아래에 나타난 키를 조절하면 된다.

(1) $Table[Plot3D[Cos[n*x]Sin[y],\ \{x,\ -2Pi,\ 2Pi\},$

$\{y,\ -2Pi,\ 2Pi\}];,\ \{n,\ 1,\ 10,\ 2\}]$

(2) $Clear[u,\ x,\ t];$

$u[x\_,\ t\_] = Sin[x]Cos[t];$

$Table[Plot[u[x,\ t],\ \{x,\ 0,\ Pi\},$

$PlotRange->\ \{-1,\ 1\}];,\ \{t,\ 0,\ 2Pi,\ 1\}]$

(3) $<<Graphics`Animation`$

$MovieParametricPlot[\{sCos[2\,Pi\,s+t],\ sSin[2\,Pi\,s+t]\},$

$\{s,\ 0,\ 4\},\ \{t,\ 0,\ 2Pi\},\ Frames->\ 10,\ Axes->\ False,$

$AspectRatio->\ Automatic,$

$PlotRange->\ \{\{-4,\ 4\},\ \{-4,\ 4\}\}];$

(4) $g = ParametricPlot3D[\{x,\ Cos[t]\ Sin[x],\ Sin[t]\ Sin[x]\},$

$\{x,\ -Pi,\ Pi\},\ \{t,\ 0,\ 2Pi\},$

$Axes->\ False,\ Boxed->\ False];$

$SpinShow[g,\ Frames->\ 10,$

$SpinRange->\ \{0\ Degree,\ 180\ Degree\}];$

(5) $Needs["Graphics`Animation`"]$

$Animate[Plot[Sin[n*x],\ \{x, -Pi, Pi\}];,\ \{n, 1, 10, 2\}];$

(6) $a = Plot[Sin[x], \{x, -Pi, Pi\}, DisplayFunction -> Identity];$

$b = Plot[Sin[5x], \{x, -Pi, Pi\}, DisplayFunction -> Identity];$

$c = Plot[Sin[10x], \{x, -Pi, Pi\}, DisplayFunction -> Identity];$

$ShowAnimation[\{a, b, c\}];$