# 8 다변수 미적분학의 기본 정리

이 장에서는 곡선 또는 곡면위에서 정의된 함수의 적분에 관하여 고찰하고 이러한 적분이 실제 응용에 어떻게 사용되는지 알아보기로 한다.

## 8.1 곡선

곡선이란 기하적으로 구불구불한 (유한 또는 무한)선분을 뜻한다. 우리는 곡선을 원, 타원, 포물선, 직선등과 같은 것을 생각할 수 있다. 이러한 곡선을 보다 수학적으로 엄밀하게 도입하도록 하자.

**정의 8.1** *곡선 $C$ 이란 구간 $I \subset \mathbb{R}$ 에서 정의된 연속함수 $\phi : I \to \mathbb{R}^m$ 를 말하며 함수 $\phi$ 의 치역($\phi$ 에 의한 $I$ 의 상)*

$$\phi(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} = \phi(t),\ t \in I\}$$

*을 $C$ 의* **자취**, *$t$ 를 곡선의* **매개변수**, *구간 $I$ 를* **매개변수 구간**이라 *한다. 이 경우 곡선 $C$ 를 간단히 순서쌍 $C = (\phi, I)$ 으로 나타낸다. 점 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 가 $C$ 의 자취에 속하면 곡선 $C$* **위에 있다**라고 *한다.*

**보기 1** $\mathbf{x}_0, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *라 하자. $\phi(t) := t\mathbf{a} + \mathbf{x}_0$ 에 대한 $\mathbb{R}$ 의 상은 직선임을 쉽게 알 수 있다(연습문제 2). 이것을* $\mathbf{x}_0$**를 지나고 a방향으로의 직선**이라 *부른다. 직선은 $\mathbb{R}^m$ 에서 가장 단순한 곡선이다.*

**보기 2** $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ *에 의한 구간 $[0, 2\pi]$ 의 상은 원임을 알 수 있다. 따라서 원은 곡선이다.*





**증명** 8.1절의 참고 1에 의하여 $\phi_u(u_0, v_0)$ 는 $(x_0, y_0, z_0)$ 에서 곡선 $\phi(u, v_0)$의 접선벡터이고 $\phi_v(u_0, v_0)$는 $(x_0, y_0, z_0)$에서 곡선 $\phi(u_0, v)$ 의 접선벡터이다. 따라서 $(x_0, y_0, z_0)$ 에서의 접평면에 대한 법선은 이러한 두 벡터의 외적에 의하여 주어진다(그림 8.14). 그러므로 $\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$는 $(x_0, y_0, z_0)$에서 $S$의 법선벡터이다. ■

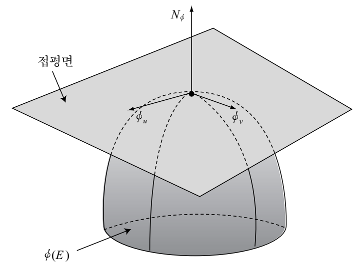


그림 8.14

$z = f(x, y)$ 이 곡면이고 $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ 이 곡면의 자명한 매개화이면 $N_\phi = (-f_x, -f_y, 1)$ 이다. 이것은 정리 6.25 와 6.1 절의 참고 1과 동일하다.

$\phi'$를 $N_\phi$로 대체함으로 해서 앞의 두 절에서 언급한 곡선의 이론과 유사한 곡면의 이론을 전개할 수 있다. 정의 8.3과 다음 정의를 비교하여 보자.

**정의 8.12** *$p \geq 1$일 때 $(\phi, E)$ 를 $\mathcal{C}^p$ 곡면 또는 $\mathcal{C}^p$ 매개변수라 하자.*

(i) *$N_\phi(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ 이면 (즉, $\|N_\phi(u_0, v_0)\| > 0$ 이면) $(\phi, E)$*는 *$(u_0, v_0) \in E$ 에서* **매끄럽다고** *말한다.*

(ii) *$(\phi, E)$가 $E$의 각 점에서 매끄럽다면 $(\phi, E)$*는 **매끄럽다고** *말한다.*

(iii) *$(\phi, E)$가 $E \setminus E_0$의 각각의 점에서 매끄러우면 집합 $E_0 \subset E$ 을 제외하고 매끄럽다고 말한다.*

곡면 $z = f(x, y)$는 항상 매끄럽다는 사실에 주의하여라.

곡선에서와 같이 $(u_0, v_0) \in E^o$에서 $\phi(u_0, v_0)$의 접평면을 갖지 않는 곡면 $(\phi, E)$는 $(u_0, v_0)$에서 매끄러울 수 없다(연습문제 7). 한편으로 매끄럽지 않은 매개변수 표현을