5 곡면기하학

5.1 방향도함수

정의 5.1 $\mathbb{E}^3$에서 f를 미분가능한 실수값을 갖는 함수이고, $\mathbf{v}_\mathbf{p}$를 $\mathbf{p}$에서의 접벡터라 할 때

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = \frac{d}{dt} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})|_{t=0}$$

를 $\mathbf{v}_\mathbf{p}$에 대한 f의 **방향도함수** (*directional derivative*)라 한다.

예제 5.1.1 $\mathbf{v} = (1,\ 0,\ -3)$, $\mathbf{p} = (1,\ 1,\ 0)$, $f = x^2yz$일 때, 방향도함수 $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$를 구하여라.

[풀이] $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1,\ 1,\ 0) + t(1,\ 0,\ -3) = (1+t,\ 1,\ -3t)$는 점 $\mathbf{p}$를 지나고 $\mathbf{v}$와 평행한 직선을 나타내므로, 이 직선에 대한 f의 값은

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1+t)^2 \cdot 1 \cdot (-3t) = -3t^3 - 6t^2 - 3t$$

이다. 따라서

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = \frac{d}{dt} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})|_{t=0} = -9t^2 - 12t - 3|_{t=0} = -3$$

이다. 이 식은 점 $\mathbf{p}$가 $\mathbf{v}$의 방향으로 움직일 때, 함수 f는 초기에 감소함을 나타낸다. ▣

정리 5.1 $\mathbb{E}^3$의 한 접벡터 $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (v_1,\ v_2,\ v_3)_\mathbf{p}$에 대해

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

가 성립한다.

5.6 회전면

측면곡선 $\alpha(u) = (g(u),\ h(u),\ 0)$을 x축을 중심으로 회전하여 얻은 회전면

$$\mathbf{x}(u,\ v) = (g(u),\ h(u)\cos v,\ h(u)\sin v)$$

에 대한 구조를 조사해 보자.

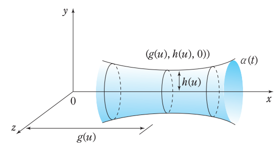

그림 5.12

$$\mathbf{x}_u = (g'(u),\ h'(u)\cos v,\ h'(u)\sin v)$$
$$\mathbf{x}_v = (0,\ -h(u)\sin v,\ h(u)\cos v)$$

이므로

$$E = g'^2 + h'^2, \quad F = 0, \quad G = h^2$$
$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (hh',\ -hg'\cos v,\ -hg'\sin v)$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = h\sqrt{g'^2 + h'^2}$$
$$\mathbf{U} = \frac{(h',\ -g'\cos v,\ -g' sinv)}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}$$
$$\mathbf{x}_{uu} = (g'',\ h''\cos v,\ h''\sin v)$$
$$\mathbf{x}_{uv} = (0,\ -h'\sin v,\ h'\cos v)$$
$$\mathbf{x}_{vv} = (0,\ -h\cos v,\ -h\sin v)$$

로부터

$$L = \frac{-g'h'' + g''h'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{g'h}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}$$