위한 필요충분조건은 그 공간이 두 번째 셀 수 있는 조건을 만족한다는 것이다.

일년 후 다시 우리존은 셀 수 있는 공간에 대한 거리화 정리를 소개하였다. 그는 다음과 같은 서로 같은뜻인 세 가지 명제를 증명하였다.

(a) X가 정규공간이고 두 번째 셀 수 있는 정리를 만족한다.

(b) X가 셀 수 있는 공간이고(즉 원소수를 셀 수 있는 조밀한 부분집합이 X안에 있다)

(c) X는 $[0,1]^{\mathbb{N}}$에 매장될 수 있다.

1925년에 티코노프는 (a)에 있는 정규공간 조건을 제대로 된 공간으로 대치 할 수 있다는 것을 알았고 이로써 오늘날의 거리화 정리가 완성되었다.

셀 수 있는 공간이 아닌 것에 대한 거리화 정리는 덮개이론과 공간의 분리성을 연구한 끝에 성과를 얻었는데, 이는 튜키가 1940년에 정규공간을 완전 정규공간(fully normal)로 좀더 세분하였고 듀돈느(Dieudonne)가 1944년에 정규공간과 컴팩트 공간의 연결개념인 파라컴팩트 개념을 도입함에 힘입은 바 크다.

1948년에 스톤(A.J. Stone)은 모든 거리를 줄 수 있는 공간은 파라컴팩트 공간 이라는 것을 밝혔는데 이는 빙, 나가타, 스미로프 세사람에게 각각 독립적으로 완전한 거리화공간의 정리를 세울 수 있는 계기를 주었다.

16.4 고른공간

고른공간 개념은 1937년에 바일(A. Weil)이 세웠다. 그는 한 논문에서 위상공간의 고른공간화 문제와 고른공간의 거리공간화 문제를 해결하였다. 많은 고른공간의 개념은 위상군의 개념으로부터 온것이 많다. 따라서 비르크호프(G. Birkhoff)와 카쿠타니(S. Kakutani)가 1936년에 독립적으로 한 위상군이 거리를 줄 수 있는 공간이 되기 위한 필요충분조건은 단위원소가 원소수를 셀 수 있는 근방의 바탕구조를 갖는다는 것을 보였다. 수학자들은 이때 나타난 증명을 가지고 고른공간의 거리화 정리도 세울 수 있었다. 1940년에 튜기는 고른공간에 관한 다른 관점을 보여 주었는데 이에 대한 자세한 내용은 이즈벨(J. Isbell)의 책에 상세히 나타나 있다(1964).

위상공간과 고른공간 사이에 있는 구조로서는 다리공간(proximity space)을 들 수 있는데 이 공간을 도입한 수학자는 에프레모빅(Efremovic)이었다(1952). 고른공간과 파라컴팩트 공간 그리고 다리공간 사이에는 명확한 관계가 있다.

함수공간 위의 위상에 관한 연구는 1935년에 티코노프가 시작하였는데 그는 자기가

정의한 곱위상 위에서의 수렴에 관하여 연구하였다. 점마다의 고른구조와 고른수렴의 구조개념은 튜키가 도입하였다(1940). 폭스(R.H. Fox)는 1945년에, 아렌스(A. Arens)는 1946년에 컴팩트-열린(compact-open)위상을 조직적으로 연구하였는데 마침내 컴팩트 부분집합위에 정의된 고른 수렴 구조가 열린 컴팩트 위상에 속한다는 사실을 밝혔다. 아스콜리 정리는 실수 연속함수에 대하여 아스콜리(G. Ascoli)가 밝혔고(1883) 좀더 일반적인 이론은 부르바키가 1948년에 세웠다.

바이어슈트라스가 연속함수들이 다항식들의 수열에 의해서 고르게 수렴된다는 사실을 1885년에 증명하였는데 이에 대한 좀더 일반적인 정리는 1948년에 스톤이 세웠다. 바이어슈트라스의 정리를 1912년에 번스타인(S. Bernstein)이 더욱 우아한 방법으로 증명하였다. 그는 $[0,1]$위에 정의된 연속인 실수함수 f로 수렴하는 다항식으로서 다음과 같은 함수를 선택하였다.

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}, x \in [0,1]$$

16.5 완전히 갖춘 거리공간

완전히 갖춘 거리공간은 1906년에 프레셰가 정의하였다. 하우스도르프는 칸토어가 유리수 집합을 실수집합의 완비화 공간으로 만드는 방법을 거리공간으로 그대로 옮겼는데 그는 모든 거리공간이 완전히 갖춘 공간화가 된다는 것을 보였다(1914). 하우스도르프는 거리공간들의 완전히 갖춘 공간화와 컴팩트 공간 사이의 관계를 연구하였고 이 두 가지 성질을 연결하는 것으로서 완전히 막힌(totally bounded)개념을 도입하였다.

부르바키는 코시수열의 개념을 필터의 개념으로 옮겼고 고른공간의 완전히 갖춘 공간화 증명을 할 수 있었다(1940).

원소수를 셀 수 있는 바탕구조를 가진 거리공간의 완전히 갖춘 공간화는 1910년 이후에 러시아와 폴란드 수학자들(알렉산드로프, 쿠라토브스키, 라브렌티프(M. Lavrentieff), 루진(N. Luzin)등...)에 의해서 철저하게 연구되었는데 이들이 연구했던 공간에 폴란드 공간(poland space)란 이름을 붙인 것은 부르바키였다(1948). 마즈르키비츠(S. Mazurkiewicz)와 알렉산드로프는 각각 1916년과 1924년에 폴란드 공간 X의 부분공간 A가 다시 폴란드 공간이 되기 위한 필요충분조건은 A가 X안에서 G_δ-공간이라는 것을 밝혔다.

$\mathbb{R}^n$안에서 제1, 제2 범주의 집합들 개념은 베어(R. Baire)가 1899년에 정의하였