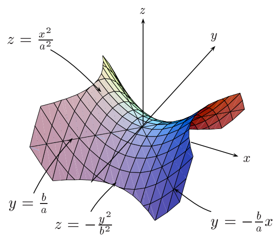

그림 1.28 쌍곡포물면의 안장점

쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ 을 z 축 둘레로 회전시켜 얻는 곡면의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.24}$$

이 된다. 이 회전쌍곡면은 z 축을 포함하는 평면과는 쌍곡선에서, z 축에 수직인 평면과는 원에서 만난다. z 축과 평행하면서 z 축과의 거리가 a인 평면은 이 쌍곡면과 두개의 교차하는 직선상에서 만난다. 예를 들어 평면 $x = a$와의 교집합은 점 $A(a, 0, 0)$에서 교차하는 두 직선

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \pm\frac{z}{c}$$

로 되어 있는 것을 알 수 있다. 이 쌍곡면과 xy 평면과의 교집합인 원 $x^2+y^2 = a^2$ 위에서 변수 x는 점 A에서 최대값을 가지는데, zx 평면과의 교집합인 쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ 위에서 변수 x는 점 A에서 극소값을 가진다. 따라서 점 A는 안장점이다. 실제로는 이 곡면 위의 모든 점이 안장점이다.

앞에서 회전시킨 쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$과 짝을 이루는 쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = -1$을 z 축을 중심으로 회전시키면 이차방정식

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{1.25}$$

의 해집합인 이차곡면을 얻는다. 식 (1.25)를 z^2에 대하여 풀면

$$z^2 = c^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) \geq c^2$$

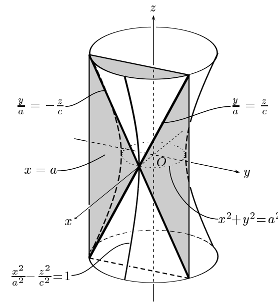

그림 1.29 회전쌍곡면

이되어 이 곡면은 $z \geq c$인 부분과 $z \leq -c$인 부분으로 나뉘어 있는 것을 알 수 있다. 이 두 종류의 회전쌍곡면을 구분하기 위하여 식 (1.24)의 곡면을 **일엽쌍곡면(hyperboloid of one sheet)**이라 부르고 식 (1.25)의 곡면을 **이엽쌍곡면(hyperboloid of two sheets)**이라고 부른다. 이 두 회전쌍곡면의 사이에는 식 (1.21)의 원뿔면이 들어 있다. 일엽쌍곡면과는 달리 이엽쌍곡면 위에는 안장점이 하나도 없다.

이 회전쌍곡면들보다 더 일반적인 방정식

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

의 해집합으로 주어지는 곡면을 **타원쌍곡면(elliptic hyperboloid)**라고 부른다. 이들도 회전쌍곡면의 경우와 같이 각각 일엽쌍곡면, 이엽쌍곡면으로 구별되어 불린다. 이들의 사이에는 식 (1.22)의 해집합인 타원뿔면이 놓여 있다. 회전쌍곡면의 경우와 같이 일엽타원쌍곡면 위의 모든 점은 안장점이고 이엽타원쌍곡면 위에는 안장점이 하나도 없다. (그림 1.30 참조.)

보기 1.7.5. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$

의 해집합의 제일팔분공간에 있는 부분을 원기둥좌표로 나타내어라.