제 5 장

극한과 연속

제 1 절 극한에 대한 직관

극한의 개념은 미분적분학에서 가장 기본이 되는 개념이다. 그래서 여기에서 나오는 개념을 정확하게 이해하는 것이 필요하다. 우리는 다음 장에서 본격적으로 미분을 다루고 이 곳에서는 우선 직관으로 극한을 보기로 한다.

예를 들어, $f(x) = 2x+5$이고 $x = 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999,\ 1.1,\ 1.01,\ 1.001, 1.0001, 1.00001$ 등등 으로 주어졌다고 가정하자. 이 때

$$\begin{gathered} f(1.1) = 7.2, \\ f(1.01) = 7.02, \\ f(1.001) = 7.002, \\ f(1.0001) = 7.0002 \\ f(1.00001) = 7.00002 \end{gathered}$$

이다. 이 것으로부터 x가 1의 우측에서, 즉 x가 1보다 큰 쪽에서 1에 가까울수록(접근할 수록) $f(x)$는 7에 접근한다. 이 때 우리는

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 7$$

과 같이 표기하고, 이 값을 $x = 1$에서 $f(x)$의 우극한(값)이라고 한다. 또

$$\begin{gathered} f(0.9) = 6.98 \\ f(0.99) = 6.998 \\ f(0.999) = 6.9998 \\ f(0.9999) = 6.99998 \\ f(0.99999) = 6.999998 \end{gathered}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1-(1/x)^2} = 1$
6. 그러므로 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1-(1/x)^2}}{2+(1/x)} = \dfrac{1}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1} = \dfrac{1}{2}.$

보기 5.29 다음의 극한값이 있으면 구하라.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}.$$

풀이. $x = 1$이면 분모와 분자는 0 이다. 만일 $x > 1$이면

1. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$
2. $\lim\limits_{x\to 1+0}(x+1) = 2, \quad \lim\limits_{x\to 1+0}(x-1) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{x+1} = \sqrt{2}, \quad \lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{x-1} = 0$
4. 그러므로 $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \infty$

구간에 따라 함수 f에 대한 연속을 다음과 같이 정한다.

1. 함수 f가 (a,b)에서 연속 $\iff$ 함수 f가 모든 점 $x \in (a,b)$에서 연속
2. 함수 f가 $[a,b)$에서 연속 $\iff$ 함수 f가 (a,b)에서 연속이고 a에서는 우측연속
3. 함수 f가 $(a,b]$에서 연속 $\iff$ 함수 f가 (a,b)에서 연속이고 b에서는 좌측연속
4. 함수 f가 $[a,b]$에서 연속 $\iff$ 함수 f가 모든 점 $x \in (a,b)$에서 연속이고 a에서는 우측연속, b에서는 좌측연속