3 곡선기하학

3-1 $\mathbf{E}^3$의 등장변환
3-2 등장변환의 미분사상
3-3 향
3-4 유클리드 기하학
3-5 곡선의 합동

우리가 잘 알고 있는 평면기하학에서 삼각형의 합동(congruence)을 어떻게 정의할 수 있는가? 한 삼각형을 다른 삼각형으로 이동할 수 있는 평면 위의 강체운동(rigid motion)이 존재할 때 두 삼각형은 합동이라고 정의한다. 합동인 두 삼각형 사이에는 대응하는 각의 크기, 대응하는 변의 길이는 물론이고 두 삼각형의 면적과 같은 유클리드적 성질은 모두 같다. 이 단원에서는 유클리드 공간의 강체운동에 관하여 자세하게 공부할 것이다.

3-1 $\mathbf{E}^3$의 등장변환

유클리드 공간의 등장변환(isometry) 또는 강체운동은 점 사이에 유클리드 거리를 보존시켜 주는 사상의 특별한 형태로 볼 수 있다(제 2 장의 정의 1-2).

정의 1-1

$\mathbf{E}^3$의 모든 점 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$에 대하여

$$d(F(\mathbf{p}),\ F(\mathbf{q}))=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$$

를 만족하는 사상 $F:\mathbf{E}^3\to\mathbf{E}^3$을 $\mathbf{E}^3$의 등장사상 또는 등장변환(isometry)이라고 한다.

예제 1-2

(1) 평행이동(translations): $\mathbf{a}$를 $\mathbf{E}^3$의 정점, T를 $\mathbf{E}^3$의 모든 점에 $\mathbf{a}$를 더해 주는 사상이라 할 때, 모든 점 $\mathbf{p}$에 대하여

$$T(\mathbf{p})=\mathbf{p}+\mathbf{a}$$

로 정의하자. 이때 T를 $\mathbf{a}$만큼의 평행이동(translation)이라 한다. 이때

$$\begin{aligned} d(T(\mathbf{p}),\ T(\mathbf{q}))&=d(\mathbf{p}+\mathbf{a},\ \mathbf{q}+\mathbf{a})\\ &=\|(\mathbf{q}+\mathbf{a})-(\mathbf{p}+\mathbf{a})\|=\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})\end{aligned}$$

이므로, 평행이동 T는 등장변환이다.

(2) 좌표축 중심의 회전이동(rotation around a coordinate axis): $\mathbf{E}^3$의 점 $\mathbf{p}(p_1,\ p_2,\ p_3)$을 z축을 중심으로 θ만큼 회전하여 얻은 점을 $\mathbf{q}(q_1,\ q_2,\ q_3)$이라 하면

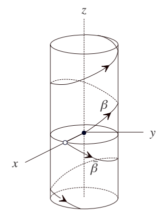

그림 3-7

예제 4-3

단위속도나선

$$\beta(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ \frac{s}{c}\right)$$

는 제 2 장의 예제 3-3의 결과부터 $a=b=1$, $c=\sqrt{2}$인 경우이므로 $\kappa=\tau=\frac{1}{2}$이다. 이제 R를 xy-평면에 대한 반사변환이라 하면 R는 등장변환이므로 $R(x,\ y,\ z)=(x,\ y,\ -z)$이다. 따라서 상곡선 $\bar{\beta}=R(\beta)$는 β의 거울상

$$\bar{\beta}(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ -\frac{s}{c}\right)$$

이다. 그림 3-7에서 보듯이 β와 $\bar{\beta}$는 반대방향으로 꼬여 있다. β가 오른손방향이면 $\bar{\beta}$는 왼손방향이다(실제로 β는 위로 감아올라가고 있고 $\bar{\beta}$는 내려가고 있다). 결국 반사변환 R은 향을 반대로 한다. 그러므로 위 정리 4-2로부터 $\bar{\kappa}=\kappa=\frac{1}{2}$이고 $\bar{\tau}=-\tau=-\frac{1}{2}$이다. $\bar{\beta}$는 제 2 장의 예제 3-3에서 $a=1$, $b=-1$인 경우이며, 이것은 일반공식을 사용해도 쉽게 계산할 수 있다. □