(ii) 대칭군에 속하는 모든 평행이동이 두 개의 독립적인 평행이동으로 생성되는 군

이 군들을 각각 **rosette 군**, **띠무늬군**, **벽지군**(wallpaper group, network group, 평면결정군)으로 부르고, 이 때의 무늬를 **rosette**, **띠무늬**(strip pattern, frieze pattern), **벽지무늬**라고 부른다.

이제 위 세 가지를 다시 분류하여 보자.

1.1 유한 평면대칭군

"모나리자"나 "최후의 만찬" 등으로 유명한 이탈리아의 레오나르도 다빈치(1452–1519)는 성당의 설계를 하면서 기도하는 곳과 꽃병을 둘 곳들을 연구하다 다음 정리를 발견하였다 [Weyl]. 이 정리는 유한 평면대칭군은 순환군(C_n)이거나 이면군(D_n)임을 말한다.

> **정리 1.1.1 (레오나르도 다빈치)** 이산 대칭군을 가지는 평면무늬가 평행이동에 대한 대칭성을 가지지 않으면 이 무늬의 대칭군은 다음 가운데 하나이다:
>
> $$C_n, \qquad D_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

증명. 주어진 평면무늬의 대칭군을 G 라고 두자.[4]

G 가 항등변환으로만 이루어져 있는 경우는

$$G = C_1$$

[4] G 가 유한 군이라는 것을 가정하면 증명이 조금 쉬워진다. 예를 들어 유한 군 G 의 부동점을 구하려면 아무 점이나 하나 선택한 다음, 이 점의 궤도의 중심이 바로 부동점이다. 변화 속에서 변하지 않는 것을 구하려면 평균하면 된다.

마찬가지 방법으로 7겹 이상의 대칭성이 존재하지 않는다는 것을 보일 수 있다. □

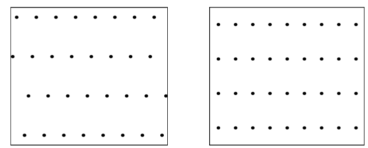
결정군 제한 정리에서 다음을 얻는다.

> **따름정리 1.4.2 (Crystal Classes)** 벽지군의 점군에는 다음 열 가지가 있다:
>
> $$\begin{array}{ccccc} C_1, & C_2, & C_3, & C_4, & C_6 \\ D_1, & D_2, & D_3, & D_4, & D_6 \end{array}$$

벽지무늬 F 의 대칭군에서 평행변환들로 이루어진 부분군을 $\mathcal{T}(F)$ 라 하자. 이 군은 일차독립인 두 가지 평행변환 τ_1, τ_2 로 생성된다:

$$\mathcal{T}(F) = \{n_1\tau_1 + n_2\tau_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

이 때 무늬(또는 평면)의 한 점 P 의 궤도 $\{\tau(P) \mid \tau \in \mathcal{T}(F)\}$ 는 **격자**(lattice)이다.[16] 평면의 격자에는 다음 "다섯 종류"가 있다.[17]



평행사변형 격자 직사각형격자

[16] 평면의 부분집합 L 이 **격자**라는 것은 다음을 뜻한다: 만약 L 의 한 점 O 를 고정하면 일차독립인 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 존재하여

$$L = O + \{n\mathbf{v} + m\mathbf{w} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

라는 뜻이다. 물론 L 의 한 점 O 를 고정하더라도 "생성벡터" $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 가 유일하게 정해지지는 않는다. (예를 들면, $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ 도 생성벡터이니까.) HP18(c) 참조.

[17] 두 격자 L_1, L_2 사이에 전단사사상 $f : L_1 \to L_2$ 가 존재하여 대칭군 사이의 전단사사상 $f_* : \mathrm{Sym}(L_1) \to \mathrm{Sym}(L_2)$ 를 유도하면 두 격자를 같은 것으로 보았다.