6.4 L'Hospital의 법칙

초등미적분학에서 부정형 $\left(\frac{0}{0}, \text{ 또는 } \frac{\infty}{\infty}\text{꼴}\right)$인 경우의 함수의 극한값을 계산하는 방법으로서 L'Hospital의 법칙을 이미 배운 바가 있다. 여기서는 초등미적분학에서 생략하였던 이 법칙의 증명을 앞 절에서 논한 Cauchy의 평균값정리를 이용하여 증명하기로 한다.

6.4.1 정의 함수 $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$에 있어서, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$이면 함수 $\frac{f}{g}$는 $x=a$에서 $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$**인 부정형**(indeterminate form)이 된다고 말한다. 또한 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$[또는 $-\infty$]이고, $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$[또는 $-\infty$]이면, 함수 $\frac{f}{g}$는 $x=a$에서 $\frac{\infty}{\infty}$**인 부정형**이 된다고 말한다.

6.4.2 정리 함수 $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$가 $[a, b]$에서 연속이고, 또한 (a, b)에서 미분가능하며 $f(a) = g(a) = 0$이라고 하자. 또, 모든 점 $x \in (a, b)$에 대하여 $g(x) \neq 0$이고 $g'(x) \neq 0$일 때, 다음이 성립한다.

(a) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L은 실수)이면, $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

(b) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$[또는 $-\infty$]이면,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty[\text{또는 } -\infty]$$

【증명】 (a) $\varepsilon > 0$을 임의의 실수라고 하자. $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$이므로, 주어진 $\varepsilon > 0$에 대응하는 적당한 $\delta > 0$이 존재하여

$$a < x < a+\delta \Longrightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$$

이 성립한다. 한편, 임의의 점 $x \in (a, a+\delta)$에 대하여 f와 g는 구간 $[a, x]$ 위에서 Cauchy의 평균값정리의 가정을 모두 만족하므로

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

를 만족시키는 점 $c_x \in (a, x)$가 존재한다. 따라서,

$$a < x < a+\delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right| < \varepsilon$$

이 성립한다. 그러므로 우극한의 정의에 의하여 $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$이다.

(b) ∞인 경우만을 증명하기로 한다. K를 임의의 양의 실수라고 하자. $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$이므로, $K > 0$에 대응하는 적당한 $\delta > 0$이 존재해서

$$a < x < a+\delta \Longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > K$$

가 성립된다. 한편, (a)의 증명에서와 같이 임의의 점 $x \in (a, a+\delta)$에 대하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

를 만족시키는 점 $c_x \in (a, x)$가 존재한다. 따라서

$$a < x < a+\delta \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > K$$

가 성립한다. 그러므로 우극한의 정의에 의하여 $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$이다.

위의 정리에서 우극한인 경우만을 생각하였는데, 정리의 가정을 좌극한인 경우로 바꾸어도 정리가 성립함을 같은 방법으로 증명할 수 있다. 따라서, 다음의 따름정리를 얻는다.