16
집합론적인 위상학의 역사적 발전 과정

우리가 오늘날 배우고 있는 집합론적 위상은 사실 하우스도르프로부터 시작되었다. 그는 1914년에 '집합론 개론'에서 위상을 2.2.4에 있는 근방 공리 (a)–(d)까지를 가지고 정의하였다. 그 책에서 또한 T_2-공간도 정의하였고 세 장에 걸쳐서 근방공리를 가지고 위상공간을 정의해 나가기 시작하였다. 위상공간 안의 여러가지 점들의 형태에 대해서도 정의하였는데 예를 들면 '내점', '경계점', '밀착점', '쌍인점'등이었고 또한 조밀한 집합과 어느곳에서도 조밀하지 않은 집합의 정의도 확립하였다. 그 정의의 대부분은 거리공간으로부터 따온 것이었다.

거리공간은 1906년에 하우스도르프보다 8년 앞서 프레셰(M. Frechet)가 정의하였다(거리공간이라는 이름은 그러나 하우스도르프가 명명하였다). 프레셰는 거리공간에서 나타나는 많은 정리들을 수렴의 개념을 가지고서 설명하였다. 그러나 프레셰는 셀 수 있는 수열들만 가지고 연구하였기 때문에 그의 이론들은 많은 결실을 맺지 못하였다. 비슷한 경우로서 리즈(F. Riesz)를 들 수 있는데 그는 먼저 쌍인점을 정의하기 시작하면서 거리개념의 도움없이 오로지 점과 함수들로 이루어진 집합들에서 공통적 관계를 세우려고 하였다.

하우스도르프의 위상공간 개념은 곧바로 대단히 유용하다는 것이 밝혀졌다. 그의 개념은 여러 방면에서 응용되었는데, 쿠라토프스키(C. Kuratowski)는 1922년에 리즈의 아이디어를 다시 연구한 후에 위상의 정의를 닫힌 개념을 가지고 정의하였다. 즉 다음의 성질을 만족하는 함수 $\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$를 고찰하였던 것이다.

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

(b) $A \subseteq \overline{A}$

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

$\overline{F} = F$를 만족하는 $F \subseteq X$는 바로 X의 닫힌집합들이다.

오늘날 우리가 사용하는 위상의 정의는 알렉산드로프가 세웠다. 그는 1925년에 최초로 한 집합 위에 2.1.1의 $(a), (b)$를 만족하는 열린집합의 조건을 제시함으로서 위상을 정의하였다. '위상'이란 단어는 켈리(J.L. Kelly)가 1955년에 최초로 사용하였다.

부분위상 개념은 1914년에 하우스도르프가 도입하였고 위상의 곱위상은 1923년에 티체(H. Tietze)가 정의하였다. 그러나 당시의 곱위상 개념은 완벽하지 않은 것이었다. 모순이 없는 완벽한 곱위상의 개념은 1930년에 티코노프(A. Tychonoff)가 정립하였다. 좀더 일반적인 곱위상의 구조나 부분위상의 개념은 1940년 부르바키(N. Bourbaki)가 도입하였고 몫공간은 무어(R.L. Moore)(1925)와 알렉산드로프(1926) 등이 정의하고 연구하였다.

16.1 위상공간의 체계적 구조

위상공간의 구조에 관한 연구는 다음과 같이 나눌 수 있다.

1. 가산성
2. 연결성
3. 분리성
4. 컴팩트

1. 가산성

첫 번째, 두 번째 세는 공리는 하우스도르프가 쓴 집합론 개론에서 정의되었다(1914). 또 다른 셀 수 있는 개념인 '분리 가능한' 성질(이는 원소 수를 셀 수 있는 조밀한 부분집합의 존재성)은 함수해석학에서 매우 중요한 개념인데 이미 1906년에 프레셰가 그의 거리공간론에 도입하였다.

2. 연결성

1893년에 조르당(C. Jordan)은 $\mathbb{R}^n$의 연결된 부분공간을 닫힌분할의 개념을 가지고 정의하였다. 그러나 그에 앞서 칸토어(G. Cantor)는 $\mathbb{R}^n$의 연결된 부분공간의 $\varepsilon-$연결성에 관한 정의를 다음과 같이 사용하였다.

모든 두 개의 점 $a, b \in A$와 $\varepsilon > 0$에 대해서 유한한 점들 $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$로 이루어진 수열이 있어서 x_i부터 $x_{i+1}(i = 0, \ldots, n-1)$까지의 거리가 ε보다 작게 될 때 A를 연결되었다(connected)라고 한다. 이 정의는 임의의 거리공간에도 확장할 수 있는데 컴팩트 거리공간 안에서는 다른 연결된 공간의 개념들이 서로 같은뜻이다.

$\mathbb{R}^n$의 부분집합에 대해서 정의된 '길로 연결 (path connected)'된 개념은 19세기에 이미 자주 쓰였는데 바이어슈트라스(K. Weierstrass)가 자기의 이론에 자주 사용하였다. 하우스도르프는 1914년에 조르당의 연결 개념을 임의의 위상공간에 그대로 적용하였다. 그는 연결성분과 '완전히 끊어진 공간'의 개념을 도입하였다.

국소적으로 연결된 공간은 1914년 한(Hahn)이 정의를 내렸는데 티체와 쿠라토프스키 등에 의해 더 자세히 연구되었다. 이에 관한 연구 논문은 하안이 1921년에 발표하였다.

연결된 공간, 완전히 끊어진 공간 그리고 영 차원 공간들에 관한 자세한 연구는 크나스터(B. Knaster), 쿠라토프스키 그리고 시어핀스키(W. Sierpinski)등이 유명하다.

3. 분리성

하우스도르프가 집합론에 관한 기본적인 틀을 세운 후에 집합론적인 위상 분야는 크게 두 가지 방향으로 나아갔다. 하나는 거리공간에서의 많은 개념을 위상공간으로 옮길 수 있는 조건을 찾는 것이었고 또 다른 하나는 위상공간의 거리화 문제를 위한 필요충분조건을 찾는 것이었다. 이런 연구들에서 중요한 역할을 하는 것이 바로 여러 종류의 분리된 공간을 연구하는 것이었다.

T_1-공간은 프레셰가 사용했는데 지금의 것과는 약간 다르긴 하지만 1906년에 발표한 수렴공간의 정의에 나타난다. 하우스도르프는 그의 책에서 주로 T_2-공간에 관해서 연구하였는데 여기에 T_2-에 관한 정의가 나타났다. T_3-성질은 1921년에 비토리스(L. Vietoris)가 도입하였고 티체는 1923년에 T_4-성질을 추가하였다. 그리고 티체가 바로 이 성질을 최초로 사용한 사람이었다. 우리존(P. Urysohn)은 1925년에 자기의 논문에 완벽한 공간 개념을 도입하였는데 이 논문에서 오늘날 우리존의 도움정리로 알려진 유명한 정리를 증명하였다. 티코노프는 1930년에 T_3-성질이 위상공간을 닫힌 구간들의 곱공간으로 매장함수를 통하여 연구할때 중요한 역할을 한다는 것을 알았다.

티체는 1915년에 T_4-공간에 관한 정리들을 증명하였고 레프셰츠(Lefschetz)는 1942년에 정규공간의 열린덮개에 관한 이론을 발표하였다.

4. 컴팩트

20세기에 들어와서 수학자들은 $\mathbb{R}^n$의 컴팩트 부분공간에 관하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(a) $A \subseteq \mathbb{R}^n$은 닫혀있고 막혀있다.

(b) 원소가 무한한 A의 부분집합들은 적어도 하나의 쌓인점을 가지고 있다(볼차노-바이어슈트라스).

(c) A의 모든 수열에는 A안에서 수렴하는 부분수열이 있다(볼차노-바이어슈트라스).

(d) A의 모든 덮개들에는 원소수가 유한한 부분덮개가 있다(하이네-보렐).

(a)가 거리공간 $\mathbb{R}^n$에 국한된 것이라면 (b)-(d)는 임의의 위상공간에 그대로 적용할 수 있다. (b)-(d)에 있는 각각의 성질은 컴팩트 개념을 형성하는데 프레셰는 1906년에 거리공간의 부분집합이 (b)를 만족하면 컴팩트 공간이라고 하였다. 이 개념을 후에 그대로 위상공간에 적용하였는데 오늘날에는 이 개념이 '셀 수 있는 컴팩트 공간'으로 알려져있다. 1924년이 되어서야 우리존과 알렉산드로프가 오늘날의 컴팩트 개념인 (d)를 도입하게 된다. 그들은 (d)를 만족하는 공간을 바이컴팩트(bicompact)라고 하였다. 1930년에 티코노프가 바이컴팩트 성질이 곱공간으로 그대로 옮겨진다는 것을 증명하였는데 그 결과로서 바이컴팩트는 셀 수 있는 컴팩트 공간이나 수렴컴팩트 공간에는 적용이 안된다는 결론을 얻었다. 이로써 컴팩트의 개념이 정착하게 되었다. 셀 수 있는 컴팩트 공간의 개념은 심지어 유한한 곱공간에도 옮겨지지 않는다. 수렴컴팩트 공간은 셀 수 있게 많은 곱공간에만 적용된다.

밑바탕구조 정리는 알렉산더(J.W. Alexander)가 세웠고 국소적 컴팩트 공간은 티체와 알렉산드로프가 각각 독립적으로 정의하였다. 그들은 함수론에서 잘 알려진 가우스의 수평면(number plane)을 가우스의 수체(number sphere)로 옮기는 과정에서 국소적 컴팩트 공간을 옮길 수 있고 거기서 한 점에 관한 컴팩트화가 가능하다는 것을 알았다.

16.2 수렴

$\mathbb{R}^n$과 같은 첫 번째 세는 공리를 만족하는 공간에서는 수열만 가지고도 밀착점, 함수의 연속성등 많은 개념을 세울 수 있다. 수열로서 나타나지 않는 극한값 문제는 이미 위상공간의 개념 설립 이전에 리만 적분과 같은 적분문제에서 나타났었다. 닫힌 구간 $[a, b]$위에 정의된 연속함수의 적분정의에서 $[a, b]$의 모든 분할에 두 개의 위의 합 아래의 합이 되는 실수를 결정한다. 이제 $[a, b]$의 모든 분할들의 집합 위에 순서를 정의하

면 위의 합들과 아래 합들로 이루어진 수열을 얻는데 이 수열의 극한값이 바로 함수의 적분값이 된다. 이러한 사고에 자극을받아 1922년에 무어는 스미스(H.L. Smith)와 함께 아주 일반적인 수열위에 수렴값 정의를 하였다. 수열의 정의역, 즉 $\mathbb{N}$은 정렬집합으로 대치되었고 이 일반화된 수열은 나중에 그물 (nets) 또는 무어-스미스 수열(켈리, 1950)이라고 불렸다.

위상에서 그물은 1937년에 비르크호프(G. Birkhoff)와 1940년 튜키(Tukey)에 의해서 응용되었다. 그물은 임의의 위상공간에서 수렴 연구를 위한 훌륭한 도구로 밝혀졌다.

수렴 이론을 연구하기 위한 또다른 좋은 도구는 필터 개념이다. 필터는 1937년에 카르탄(H. Cartan)이 도입했는데 이 새로운 개념은 그물만큼 '그림'이 잘 그려지는건 아니었지만 증명의 기술적인 차원에선 많은 유용성을 가지고 있었다. 예를들면 티코노프 정리의 증명에서 필터를 이용하면 훨씬 더 간편해지는 것을 알수 있다. 수렴이론을 필터의 개념을 가지고 조직적으로 연구한 것은 부르바키의 연구에서 자세히 볼 수 있다.

16.3 거리화

1914년 하우스도르프 개념이 도입되었을때 집합론적 위상의 중요한 과제는 위상공간이 거리를 줄 수 있는 공간(거리화)이 되기 위한 필요충분조건을 찾는 것이었다. 이에 관하여서 1920년대에는 수많은 논문이 있었는데 1950년과 51년에 빙(R.H. Bing), 나가타(J. Nagata), 스미로프(Y.M. Smirov)에 의해서 일단락되었다.

맨 처음 거리화 공간 정리는 알렉산드로프와 우리존에 의해서 발견되었다(1923). 그 정리는 T_1- 공간 X가 거리를 줄 수 있는 공간이 되기 위한 필요충분조건은 X에 한 '전개(development)' $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 있어서 다음과 같은 성질을 만족한다는 것이다. $U, V \in \mathcal{U}_n$이고 $U \cap V \neq \emptyset$이면 $U \cap V \subseteq W$를 만족하는 W가 $\mathcal{U}_{n-1}$에 있다.

여기서 X의 전개라는 것은 열린덮개 $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$들의 수열로서 모든 $\mathcal{U}_n$이 $\mathcal{U}_{n-1}$의 섬세한 덮개이고 모든 $x \in X$에 대해서 집합들의 시스템 $\{\bigcup_{U\in\mathcal{U}_n, x\in U} U \mid n \in \mathbb{N}\}$이 x 근방들의 바탕구조를 이루는 것을 의미한다.

그러나 이 거리화 정리는 너무 복잡하여 거리화 이론의 최종적인 것으로 보기에는 힘들었다. 이에 수학자들은 위상공간이 거리를 줄 수 있는 공간이 되기 위한 필요충분조건을 찾기 위한 연구를 쉬지 않았다.

실제로 일년도 지나지 않은 1924년에 우리존은 다시 위상공간이 거리를 줄 수 있는 공간이 되기 위한 간단한 판정법을 소개하였다. 이는 한 컴팩트 공간이 거리화되기

위한 필요충분조건은 그 공간이 두 번째 셀 수 있는 조건을 만족한다는 것이다.

일년 후 다시 우리존은 셀 수 있는 공간에 대한 거리화 정리를 소개하였다. 그는 다음과 같은 서로 같은뜻인 세 가지 명제를 증명하였다.

(a) X가 정규공간이고 두 번째 셀 수 있는 정리를 만족한다.

(b) X가 셀 수 있는 공간이고(즉 원소수를 셀 수 있는 조밀한 부분집합이 X안에 있다)

(c) X는 $[0,1]^{\mathbb{N}}$에 매장될 수 있다.

1925년에 티코노프는 (a)에 있는 정규공간 조건을 제대로 된 공간으로 대치 할 수 있다는 것을 알았고 이로써 오늘날의 거리화 정리가 완성되었다.

셀 수 있는 공간이 아닌 것에 대한 거리화 정리는 덮개이론과 공간의 분리성을 연구한 끝에 성과를 얻었는데, 이는 튜키가 1940년에 정규공간을 완전 정규공간(fully normal)로 좀더 세분하였고 듀돈느(Dieudonne)가 1944년에 정규공간과 컴팩트 공간의 연결개념인 파라컴팩트 개념을 도입함에 힘입은 바 크다.

1948년에 스톤(A.J. Stone)은 모든 거리를 줄 수 있는 공간은 파라컴팩트 공간 이라는 것을 밝혔는데 이는 빙, 나가타, 스미로프 세사람에게 각각 독립적으로 완전한 거리화공간의 정리를 세울 수 있는 계기를 주었다.

16.4 고른공간

고른공간 개념은 1937년에 바일(A. Weil)이 세웠다. 그는 한 논문에서 위상공간의 고른공간화 문제와 고른공간의 거리공간화 문제를 해결하였다. 많은 고른공간의 개념은 위상군의 개념으로부터 온것이 많다. 따라서 비르크호프(G. Birkhoff)와 카쿠타니(S. Kakutani)가 1936년에 독립적으로 한 위상군이 거리를 줄 수 있는 공간이 되기 위한 필요충분조건은 단위원소가 원소수를 셀 수 있는 근방의 바탕구조를 갖는다는 것을 보였다. 수학자들은 이때 나타난 증명을 가지고 고른공간의 거리화 정리도 세울 수 있었다. 1940년에 튜기는 고른공간에 관한 다른 관점을 보여 주었는데 이에 대한 자세한 내용은 이즈벨(J. Isbell)의 책에 상세히 나타나 있다(1964).

위상공간과 고른공간 사이에 있는 구조로서는 다리공간(proximity space)을 들 수 있는데 이 공간을 도입한 수학자는 에프레모빅(Efremovic)이었다(1952). 고른공간과 파라컴팩트 공간 그리고 다리공간 사이에는 명확한 관계가 있다.

함수공간 위의 위상에 관한 연구는 1935년에 티코노프가 시작하였는데 그는 자기가

정의한 곱위상 위에서의 수렴에 관하여 연구하였다. 점마다의 고른구조와 고른수렴의 구조개념은 튜키가 도입하였다(1940). 폭스(R.H. Fox)는 1945년에, 아렌스(A. Arens)는 1946년에 컴팩트-열린(compact-open)위상을 조직적으로 연구하였는데 마침내 컴팩트 부분집합위에 정의된 고른 수렴 구조가 열린 컴팩트 위상에 속한다는 사실을 밝혔다. 아스콜리 정리는 실수 연속함수에 대하여 아스콜리(G. Ascoli)가 밝혔고(1883) 좀더 일반적인 이론은 부르바키가 1948년에 세웠다.

바이어슈트라스가 연속함수들이 다항식들의 수열에 의해서 고르게 수렴된다는 사실을 1885년에 증명하였는데 이에 대한 좀더 일반적인 정리는 1948년에 스톤이 세웠다. 바이어슈트라스의 정리를 1912년에 번스타인(S. Bernstein)이 더욱 우아한 방법으로 증명하였다. 그는 $[0,1]$위에 정의된 연속인 실수함수 f로 수렴하는 다항식으로서 다음과 같은 함수를 선택하였다.

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}, x \in [0,1]$$

16.5 완전히 갖춘 거리공간

완전히 갖춘 거리공간은 1906년에 프레셰가 정의하였다. 하우스도르프는 칸토어가 유리수 집합을 실수집합의 완비화 공간으로 만드는 방법을 거리공간으로 그대로 옮겼는데 그는 모든 거리공간이 완전히 갖춘 공간화가 된다는 것을 보였다(1914). 하우스도르프는 거리공간들의 완전히 갖춘 공간화와 컴팩트 공간 사이의 관계를 연구하였고 이 두 가지 성질을 연결하는 것으로서 완전히 막힌(totally bounded)개념을 도입하였다.

부르바키는 코시수열의 개념을 필터의 개념으로 옮겼고 고른공간의 완전히 갖춘 공간화 증명을 할 수 있었다(1940).

원소수를 셀 수 있는 바탕구조를 가진 거리공간의 완전히 갖춘 공간화는 1910년 이후에 러시아와 폴란드 수학자들(알렉산드로프, 쿠라토브스키, 라브렌티프(M. Lavrentieff), 루진(N. Luzin)등...)에 의해서 철저하게 연구되었는데 이들이 연구했던 공간에 폴란드 공간(poland space)란 이름을 붙인 것은 부르바키였다(1948). 마즈르키비츠(S. Mazurkiewicz)와 알렉산드로프는 각각 1916년과 1924년에 폴란드 공간 X의 부분공간 A가 다시 폴란드 공간이 되기 위한 필요충분조건은 A가 X안에서 G_δ-공간이라는 것을 밝혔다.

$\mathbb{R}^n$안에서 제1, 제2 범주의 집합들 개념은 베어(R. Baire)가 1899년에 정의하였

고 그는 $\mathbb{R}^n$의 열린 부분집합이 셀 수 있게 많은 어디에서도 조밀하지 않은(nowhere dense)집합들의 합집합으로 나타나지 않는다는 것을 증명하였다. 첵(E. Cech)은 1937년에 이 정리를 완전히 갖춘 공간화 거리공간으로 옮기는 데 성공하였다. 1924년에 무어가 국소적 컴팩트 공간이 바로 이 성질을 가지고 있다는 사실을 밝혔다. 베어의 범주정리를 이용하여 바나흐(S. Banach)는 어떤 점에서도 미분가능하지 않은 연속인 실수함수의 존재증명을 밝힐 수 있었다(1931).

1937년에 스톤과 첵은 각각 독립적으로 컴팩트화의 존재성을 밝혔는데 그 방법은 완전히 달랐다. 첵은 티코노프가 1930년에 보였던 모든 완벽한 공간은 닫힌 구간들의 곱위상에 매장될 수 있다는 사실을 바탕으로 증명하였다. 이로써 가장 큰 문제였던 컴팩트화가 해결되었다. 반면에 스톤은 X위에 정의된 연속인 실수함수들의 환 $C(X)$를 고찰하고 그 안의 극대 이데알을 연구하였다. $C(X)$의 극대 이데알의 집합 $\mathcal{M}$위에 적당한 위상을 정의하면 $\mathcal{M}$이 컴팩트이고, $C(X)$의 고정된 이데알의 집합이 X와 위상동형이 되는 $\mathcal{M}$의 부분공간이 된다는 사실을 알았다. 그러면 이 $\mathcal{M}$을 X의 '스톤-첵 컴팩트화'라고 한다. 스톤-첵 컴팩트화를 필터로 표현하는 것은 스톤과 월맨(H. Wallman) 그리고 알렉산드로프가 시도하였다.