13. 구간 $[0,1]$에서 정의된 실함수들의 집합 $F[0,1] = \{f \mid f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\}$는 벡터공간이 됨을 증명하여라.

14. 5차 이하의 실계수 다항식의 집합

$$\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \mid a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}\}$$

는 벡터공간이 됨을 증명하여라.

15. 보기 1.5.27에 언급된 코시-슈바르츠 부등식을 증명하여라. 즉 임의의 두 연속함수 $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$에대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\left|\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt\right|^2 \le \left(\int_0^1 [f(t)]^2\, dt\right)\left(\int_0^1 [g(t)]^2\, dt\right)$$

1.6 곡선과 경로

경로와 접선

평면 위의 곡선을 식으로 나타내는 방법에는 대체로 두 가지가 있다. 하나는

$$x^2 + y^2 = 1$$

과 같이 방정식의 해집합으로 나타내는 것과

$$f(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

와 같이 매개변수를 이용하여 함수로 나타내는 방법이다.

공간에 있는 곡선을 방정식의 해집합으로 나타내기 위해서는 일반적으로 두 개의 방정식이 필요하다. 예를 들어 xy 평면에 있는 단위원은 다음과 같은 연립방정식의 해집합이다.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

그러나 매개변수를 이용하면

$$f(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

와 같이 하나의 함수로 표시된다. 물론 공간의 점을 함수값으로 가지는 함수이어야 하기 때문에 세 개의 성분이 필요한 것은 당연하다.

정의 1.6.1. 실수의 구간 I에서 정의된 n개의 연속함수

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$$

이 있어서

$$\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in I \tag{1.16}$$

로 정의된 함수 $\mathbf{c}\colon I \to \mathbb{R}^n$을 $\mathbb{R}^n$에 있는 **경로(path)**라고 부른다.[12] 경로 $\mathbf{c}\colon I \to \mathbb{R}^n$이 있어서 $C = \{\mathbf{c}(t) \mid t \in I\}$로 나타낼 수 있는 집합 C를 **곡선(curve)**이라고 부르고, 특히 정의구역 I가 닫힌 구간 $[a, b]$일 때에는 C를 **$\mathbf{c}(a)$로부터 $\mathbf{c}(b)$에 이르는 곡선**, 또는 **$\mathbf{c}(a)$와 $\mathbf{c}(b)$를 잇는 곡선**이라고 부른다. 이때 구간의 양끝에 대응되는 두 점 $\mathbf{c}(a)$와 $\mathbf{c}(b)$를 C의 **끝점(endpoints)**이라 부르고, 특히 $\mathbf{c}(a)$를 **시점**, $\mathbf{c}(b)$를 **종점**이라 구별하여 부른다.

보기 1.6.2. 모든 실수의 집합에서 정의된 경로

$$\mathbf{c}(t) = (t, t^2), \quad -\infty < t < \infty$$

는 포물선 $y = x^2$을 나타낸다. 일반적으로, 연속함수 $y = f(x)$의 그래프는 경로 $\mathbf{c}(t) = (t, f(t))$로 나타낼 수 있다.

보기 1.6.3. 그림 1.24에서와 같이 반지름이 1/4인 원 C가 단위원 $U\colon x^2 + y^2 = 1$의 내부에서 미끄러짐이 없이 화살표의 방향으로 구르는데, 점 $(1, 0)$에서 원 U에 접했던 원 C위의 한 점이 다시 점$(1, 0)$으로 돌아올 때 까지 그리는 곡선을 경로로 나타내고, 그 방정식을 구하라.

풀이 그림 1.24에서 C의 중심이 $((3/4)\cos t, (3/4)\sin t)$일 때, 구하는 곡선 위의 점을 $\mathbf{c}(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(t) &= \frac{3}{4}(\cos t, \sin t) + \frac{1}{4}(\cos(t - 4t), \sin(t - 4t)) \\ &= \frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. $\mathbf{c}(2\pi) = (1, 0)$이므로 구하는 경로는

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

[12] 식 (1.16)으로 주어진 경로는 표준기저벡터를 사용하여 아래와 같이 나타낼 수도 있다.

$$\mathbf{c}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n(t)\mathbf{e}_n, \quad t \in I$$

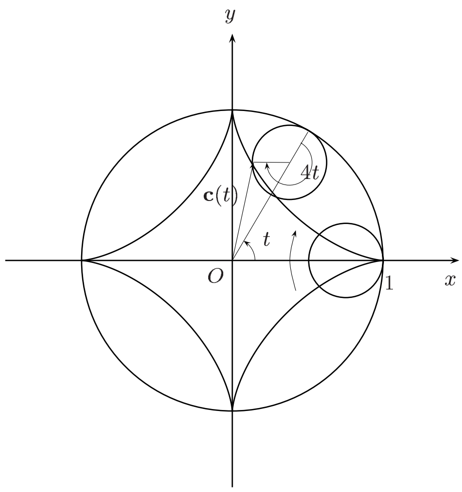

그림 1.24 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

인데, 삼각함수의 삼배각의 공식[13]에 따라

$$\mathbf{c}(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t),\quad 0\le t\le 2\pi \tag{1.17}$$

로도 쓸 수 있다. 따라서 이 곡선은 방정식

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1$$

의 해집합임을 알 수 있다. □

정의 1.6.4. 구간 I에서 식 (1.16)으로 정의된 경로 $\mathbf{c}(t)$의 모든 성분함수 $x_i(t)$가 I의 내부에서 t에 대하여 미분가능할 때 $\mathbf{c}$를 **미분가능(differentiable)**하다고 말하고 벡터

$$\mathbf{c}'(t_0)=(x_1'(t_0),x_2'(t_0),\ldots,x_n'(t_0))$$

를 $\mathbf{c}$의 $t=t_0$에서의 **접벡터(tangent vector)**라고 부른다. 미분가능한 경로 $\mathbf{c}$의 $t=t_0$에서의 접벡터가 $\mathbf{0}$이 아닐 때, 점 $\mathbf{c}(t_0)$를 지나고 $\mathbf{c}'(t_0)$에 평행인 직선을 경로 $\mathbf{c}$의 $t=t_0$에서의 **접선(tangent line)**이라고 부른다.

미분가능한 경로 $\mathbf{c}$의 $t=t_0$에서의 접벡터가 $\mathbf{0}$이 아닐 때, 점 $\mathbf{c}(t_0)$를 지나고 $\mathbf{c}'(t_0)$에 평행인 직선은 다음과 같이 경로로 나타낼 수 있다. (42쪽의 식 (1.4) 참조.)

$$\mathbf{x}(s)=\mathbf{c}(t_0)+s\,\mathbf{c}'(t_0),\quad -\infty<s<\infty$$

[13] $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta,\quad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

보기 1.6.5. 식 (1.17)로 주어진 경로의 $t = \pi/4$에서의 접선을 구하라.

$\boxed{\text{풀이}}$ $\mathbf{c}'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$이므로 $\mathbf{c}'(\pi/4) = (-3\sqrt{2}/4, 3\sqrt{2}/4)$이다. $\mathbf{c}(\pi/4) = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$이므로 구하는 접선은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-3s, 1+3s), \quad -\infty < s < \infty$$

□

보기 1.6.6. 경로 $\mathbf{c}(t) = (t, t+t^2, 3t+t^3, \cos\pi t)$의 $t = 1$에서의 접선을 구하라.

$\boxed{\text{풀이}}$ $\mathbf{c}'(t) = (1, 1+2t, 3+3t^2, -\pi\sin\pi t)$이므로 $\mathbf{c}'(1) = (1,3,6,0)$ 이다. $\mathbf{c}(1) = (1,2,4,-1)$이므로 구하는 접선은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(s) = (1,2,4,-1) + s(1,3,6,0), \quad -\infty < s < \infty$$

□

경로 $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$가 물체의 운동을 나타낸다고 하자. 즉 시각 t에서의 위치를 $\mathbf{c}(t)$라고 할 때, 이 물체의 $t = t_0$에서의 **속도(velocity)**는 다음과 같이 미분으로 얻어지는 삼차원의 벡터

$$\mathbf{c}'(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{c}(t_0+h) - \mathbf{c}(t_0)}{h} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

이므로 이는 $\mathbf{c}$의 $t = t_0$에서의 접벡터와 같다.

보기 1.6.7. 시각 t초일 때의 위치가 $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$로 주어지는 물체가 $t = 2$에서 궤도를 이탈하여 접선방향으로 5초간 이동했을 때의 위치의 좌표를 구하라.

$\boxed{\text{풀이}}$ $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$이므로 시각 $t = 2$일 때의 순간속도는 $\mathbf{c}'(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + e^2\mathbf{k}$ 이다. 따라서 물체의 위치는 벡터

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(2) + 5\mathbf{c}'(2) &= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + e^2\mathbf{k} + 5(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + e^2\mathbf{k})\\ &= 7\mathbf{i} + 24\mathbf{j} + 6e^2\mathbf{k}\end{aligned}$$

의 머리이다. 즉 $(7, 24, 6e^2)$이다. □

정칙곡선의 매개변수화

정의 1.6.8. 미분가능한 경로가 정의구간의 내부의 모든 점에서 단사함수이고, 접벡터가 영벡터가 아닐 때, 이 경로를 **정칙경로(regular path)**라고 부르

고 정칙경로로 나타낼 수 있는 곡선을 **정칙곡선(regular curve)**이라고 부른다. $\mathbb{R}^n$의 곡선 C를 $C = \{\mathbf{c}(t) \mid t \in [a,b]\}$로 나타낼 수 있는 경로 $\mathbf{c}$가 다음조건들을 만족시킬 때, $\mathbf{c}$가 C를 **매개변수(parameter)**로 나타낸다, 또는 $\mathbf{c}$로 C를 **매개변수화(parametrize)**한다고 말한다.

(1) 구간 $[a,b]$에서 어떤 유한 개의 점 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$을 제외한 집합에서는 $\mathbf{c}$가 단사함수이다.

(2) $i = 1, 2, \ldots, m$에 대하여 $\mathbf{c}|_{[t_{i-1}, t_i]} \colon [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$는 정칙경로이다.

보기 1.6.9. 미분가능한 함수 $f \colon I \to \mathbb{R}$의 그래프는 정칙곡선임을 보여라.

풀이 f의 그래프는 경로 $\mathbf{c}(t) = (t, f(t))$로 나타낼 수 있다. $\mathbf{c}$는 단사함수이고, $\mathbf{c}$의 접벡터 $\mathbf{c}'(t) = (1, f'(t))$는 구간 I의 내부의 모든 t에 대해서 영벡터가 아니다. 따라서 $\mathbf{c}$는 정칙경로이고, f의 그래프는 정칙곡선이다. □

보기 1.6.10. 평면 위의 곡선 $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$을 매개변수로 나타내어라.

풀이 보기 1.6.3의 경로

$$\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{1.18}$$

가 정의 1.6.8의 두 조건을 만족시키는 지를 살펴보자. $0 \le s < t \le 2\pi$인 s, t에 대하여 $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t)$가 성립하면, s, t는 연립방정식

$$(\cos s - \cos t)(\cos^2 s + \cos s \cos t + \cos^2 t) = 0$$
$$(\sin s - \sin t)(\sin^2 s + \sin s \sin t + \sin^2 t) = 0$$

의 해인데, 그 중에서 $0 \le s < t \le 2\pi$를 만족시키는 것은 $s = 0, t = 2\pi$뿐이다. 따라서 $\mathbf{c}$는 열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 단사함수이므로 조건 (1)을 만족시킨다. $\mathbf{c}$의 접벡터가 영벡터인 점을 구해보자.

$$\mathbf{c}'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) = (0, 0)$$

을 풀면

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

가 나온다. 따라서 $\mathbf{c}$는 네 개의 구간 $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$, $[\pi, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 2\pi]$에서 각각 정칙경로가 되므로 조건 (2)도 만족시킨다. 따라서 식 (1.18)은 주어진 곡선을 매개변수로 나타낸다. □

연습문제

1. 다음 경로의 $t = t_0$에서의 접벡터 $\mathbf{c}'(t_0)$와 접선을 구하라.
   (a) $\mathbf{c}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$, $t_0 = 1$
   (b) $\mathbf{c}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $t_0 = \pi$
   (c) $\mathbf{c}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $t_0 = 0$
2. 시각 t초일 때의 위치가 경로 $\mathbf{c}(t)$로 주어지는 물체가 시각 $t = t_0$에서 궤도를 벗어나서 접선방향으로 움직인다 하자. 시각 $t = t_1$일 때 이 물체의 위치를 구하라.
   (a) $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, $t_0 = 2$, $t_1 = 3$.
   (b) $\mathbf{c}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + (\cos\pi t)\mathbf{k}$, $t_0 = 1$, $t_1 = 3$.
   (c) $\mathbf{c}(t) = (\cos 2\pi t)\mathbf{i} + (\sin 2\pi t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t_0 = 4$, $t_1 = 7$.
3. n차원 공간에 들어 있는 세 경로 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$과 함수 $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$가 모두 미분가능할 때, 다음 미분법칙이 성립함을 보여라.
   (a) $\dfrac{d}{dt}\,\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$
   (b) $\dfrac{d}{dt}f(t)\mathbf{u}(t) = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
   (c) $n = 3$일 때, $\dfrac{d}{dt}\,\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$
   (d) $n = 3$일 때,
   $$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\,(\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t))\cdot\mathbf{w}(t)\\ &= (\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t))\cdot\mathbf{w}(t) + (\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t))\cdot\mathbf{w}(t) + (\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t))\cdot\mathbf{w}'(t)\end{aligned}$$
4. 원점으로부터 곡선 $\mathbf{c}(t) = (e^t\cos^2 t, 3 - t^2, t)$의 점 $\mathbf{c}(0)$에서의 접선에 이르는 거리를 구하라.
5. 경로 $\mathbf{c}(t)$의 점 $\mathbf{c}(t_0)$에서의 접선과 점 $\mathbf{c}(t_1)$에서의 접선 사이의 거리를 구하라.
   (a) $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.
   (b) $\mathbf{c}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + (\cos\pi t)\mathbf{k}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.
   (c) $\mathbf{c}(t) = (\cos 2\pi t)\mathbf{i} + (\sin 2\pi t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t_0 = 2$, $t_1 = 3$.

1.7 이차곡면

공간 $\mathbb{R}^3$에 있는 곡면 중에서 세 변수 x, y, z의 이차방정식의 해집합인 것을 **이차곡면(quadratic surface)**이라고 부른다. 이차방정식의 가장 일반적인 형태는

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{1.19}$$

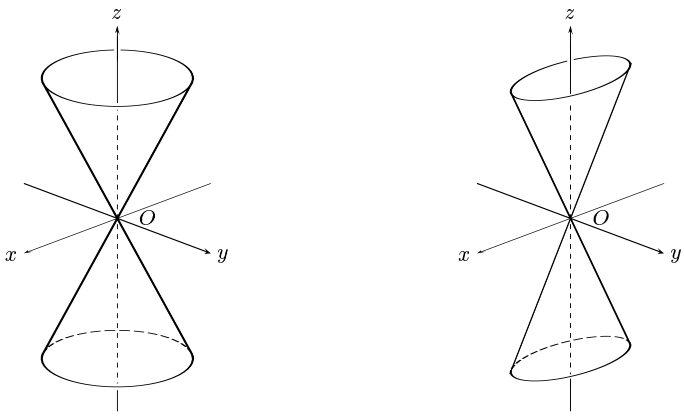

그림 1.25 원뿔면과 타원뿔면

인데, 우리는 $D = E = F = 0$인 모양의 이차방정식만을 다루기로 한다.[14]

뿔면

두 직선이 한 점에서 만나고 그들 사이의 각이 직각이 아닐 때, 한 직선의 둘레로 다른 것을 회전시켜 얻는 곡면을 **원뿔면(circular cone)**이라 부른다. $ac \neq 0$일 때, zx 평면 위의 직선 $x/a = z/c$를 z 축을 중심으로 회전시키면 이차식

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \tag{1.21}$$

의 해집합으로 주어지는 원뿔면을 얻는다. 이 원뿔면과 평면 $z = z_0$ $(z_0 \neq 0)$과의 교집합은 원이고, z 축을 품는 평면과의 교집합은 교차하는 두 직선이다. 원뿔면보다 일반적인 것으로 **타원뿔면(elliptic cone)**이 있다. $abc \neq 0$일 때 이차식

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \tag{1.22}$$

[14] 식 (1.19)에서 $D \neq 0$, $E = F = 0$ 인 경우 즉 이차방정식

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{1.20}$$

를 생각해 보자. $\alpha = (1/2)\cot^{-1}((A-B)/D)$라 하고 $x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$, $y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$로 치환하면 식 (1.20)은 X, Y, z의 이차식이 되는데 그 XY항, Yz항, zX항의 계수는 모두 0이 된다. 이것은 식 (1.20)의 해집합인 곡면을 z 축을 중심으로 적절히 회전시켜 얻는 곡면의 방정식은 xy항, yz항, zx항의 계수가 모두 0인 이차식이 된다는 것을 말해준다. 일반적으로 식 (1.19)의 해집합인 곡면을 적당한 직교행렬에 의한 일차변환에 의하여 xy항, yz항, zx항의 계수가 모두 0인 이차방정식의 해집합으로 만들 수 있다. 직교행렬에 의한 일차변환은 도형의 기하학적 모양을 바꾸지 않는 합동변환이므로 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$ 모양의 이차방정식 만으로도 모든 종류의 이차곡면을 만들 수 있다. (연습문제 6 참조.)

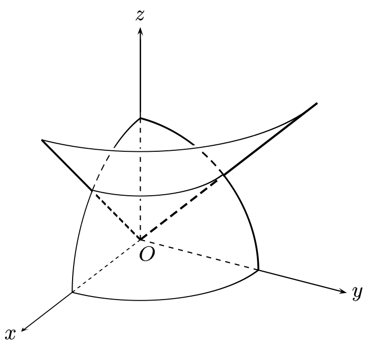

그림 1.26

으로 나타낼 수 있는 곡면을 타원뿔면이라 부른다. 이러한 타원뿔면은 평면 $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$)과의 교집합은 타원이고, z 축을 품는 평면과의 교집합은 교차하는 두 직선이다. (그림 1.25 참조.)

보기 1.7.1. 연립부등식

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

의 해집합을 구면좌표로 나타내어라.

풀이 이 영역은 원뿔면 $x^2 + y^2 = z^2$의 내부와 단위구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$의 내부와 제일팔분공간의 교집합이므로

$$\{(\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

이 된다. (그림 1.26 참조.) □

기둥면

세 개의 변수 중에서 두 변수, 예를 들어 x, y만으로 된 이차방정식

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

의 해집합인 곡면은 같은 방정식의 xy 평면 위에서의 해집합으로 나타나는 이차곡선을 $\pm\mathbf{k}$방향으로 평행이동시킨 자취이다. 이와같은 곡면을 일반적으로 **기둥면(cylinder)**이라고 부른다. 이들은 평행이동 방향에 수직인 평면과의 교집합으로 나타나는 곡선에 따라 구별하여 부른다. 예를 들어

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

은 xy 평면과의 교집합이 각각 원, 타원, 쌍곡선이므로 **원기둥면 (circular cylinder)**, **타원기둥면(elliptic cylinder)**, **쌍곡기둥면(hyperbolic cylinder)**이라고 불린다. 방정식 $z = ay^2$의 해집합은 **포물기둥면(parabolic cylinder)**인데, 이것은 yz 평면 위에서 같은 방정식의 해가 되는 포물선을 $\pm\mathbf{i}$방향으로 평행이동시킨 자취이다. (그림 1.27 참조.)

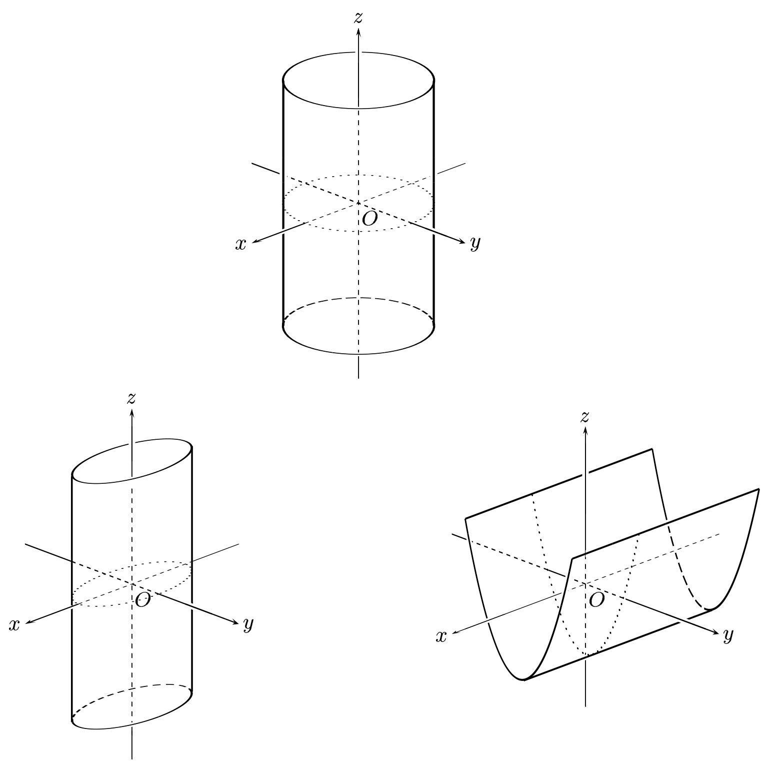

그림 1.27 원기둥면, 타원기둥면, 포물기둥면

구면과 타원면

이차방정식

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad (r>0)$$

의 해집합은 **구면(sphere)**라고 불린다. 이것은 점 (a,b,c)로부터의 거리가 r인 점들 모두의 집합이다. 구면과 평면과의 교집합으로 나타낼 수 있는 곡선은 모두 원이 되는 것을 쉽게 알 수 있다.

보기 1.7.2. $a>0$일 때, 구면 $x^2+y^2+z^2=a^2$을 원기둥좌표와 구면좌표로 나타내어라.

$\boxed{\text{풀이}}$ 원기둥좌표로 나타내면

$$r^2+z^2=a^2$$

이고 구면좌표로 나타내면

$$\rho=a$$

이다. □

구면과 비슷한 것으로 **타원면(ellipsoid)**이 있다. 타원면을 나타내는 대표적인 이차방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.23}$$

이다. 이때 $a=b$이면 이 타원면은 타원

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

을 z 축의 둘레로 회전시켜 얻는 곡면이다. 특히 $a=b=c$이면 반지름이 a인 구면이 된다.

보기 1.7.3. 원기둥좌표의 방정식

$$\frac{r^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$$

은 어떤 곡면을 나타내는지 밝혀라.

$\boxed{\text{풀이}}$ $r^2=x^2+y^2$이므로 방정식이

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$$

인 타원면이다. □

보기 1.7.4. 구면좌표의 방정식

$$\rho^2(1+\cos^2\phi)=1$$

은 어떤 곡면을 나타내는지 밝혀라.

풀이 $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$이고 $z=\rho\cos\phi$이므로 방정식이

$$x^2+y^2+2z^2=1$$

인 타원면이다. □

타원면은 임의의 평면과의 교집합이 타원[15]이거나 한 점이거나 공집합인 성질을 가지며, 이런 성질을 가지는 곡면은 타원면뿐이다. 좌표축에 수직인 평면과 식 (1.23)로 표시되는 타원면과의 교집합으로 나타나는 곡선이 타원임은 쉽게 알 수 있다. 이제 이 타원면과 평면 $Ax+By+Cz+D=0$과의 교집합 $\mathcal{E}$를 살펴보자. $C\neq 0$일 때, $z=-(Ax+By+D)/C$를 식 (1.23)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{c^2C^2}\right)x^2+\frac{2AB}{c^2C^2}\,xy+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{B^2}{c^2C^2}\right)y^2&\\ +\frac{2AD}{c^2C^2}\,x+\frac{2BD}{c^2C^2}\,y+\frac{D^2}{c^2C^2}-1&=0\end{aligned}$$

이 이차식의 판별식[16]은

$$\left(\frac{AB}{c^2C^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{c^2C^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{B^2}{c^2C^2}\right)=-\frac{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}{a^2b^2c^2C^2}$$

이므로 음수이다. 따라서 $\mathcal{E}$를 xy 평면에 정사영한 것이 타원임을 알 수 있다. 다른 평면에 정사영하여 타원이 되는 평면곡선은 타원뿐인데 그 이유는 평면을 다른 평면에 정사영하는 것은 일차변환과 같고 일차변환에 의하여 타원은 타원으로 보내지기 때문이다.

[15] 원도 타원의 하나로 받아 들인다.

[16] 이차방정식 $\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\epsilon y+\zeta=0$의 판별식은 $\beta^2-\alpha\gamma$인데 이것이 양수이면 xy 평면 위에서의 해집합은 쌍곡선, 음수이면 타원, 영이면 포물선이다.

포물면

zx 평면 위의 포물선 $z = x^2$를 z 축의 둘레로 회전시켜 얻는 곡선의 방정식은

$$z = x^2 + y^2$$

인데 이 곡면을 **원형포물면(circular paraboloid)** 또는 **회전포물면(paraboloid of revolution)**이라고 부른다. 이와 비슷한 것으로 **타원포물면(elliptic paraboloid)**이 있다. 곡면

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (ab \neq 0)$$

은 타원포물면인데, z 축을 포함하는 평면과의 교집합은 포물선이고 z 축에 수직인 평면 $z = z_0$ $(z_0 > 0)$과의 교집합은 타원이다.

z 축을 포함하는 평면과의 교집합은 포물선이고 z 축에 수직인 평면과의 교집합은 쌍곡선인 곡면이 있다. 이러한 곡면을 **쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid)**이라고 부른다. 쌍곡포물면의 하나인

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (ab \neq 0)$$

를 살펴보자. 이 곡면과 xy 평면의 교집합은 방정식

$$0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

의 해집합, 즉 교차하는 두 직선 $y = \pm(b/a)x$인데 xy 평면과 평행한 다른 평면과의 교집합은 항상 쌍곡선이 된다. 또한 z 축을 포함하는 평면 중에서 $y = \pm(b/a)x$ 가 아닌 것과의 교집합은 항상 포물선이 된다. 그림1.28에서 보는 바와 같이 이 곡면과 zx 평면과의 교집합인 곡선 $z = x^2/a^2$ 위에서 변수 z는 점 $O(0,0,0)$에서 최소값을 가지는데, yz 평면과의 교집합인 곡선 $z = -y^2/b^2$ 위에서는 O에서 최대값을 가진다. 이러한 점을 **안장점(saddle point)**이라고 부른다. 안장점에 대해서는 다음 장에서 더 자세히 다루도록 한다.

쌍곡면

평면 위의 쌍곡선을 하나의 대칭축의 둘레로 회전시켜 얻는 곡면을 **원형쌍곡면(circular hyperboloid)** 또는 **회전쌍곡면(hyperboloid of revolution)**이라 부른다. 예를 들어 $a > 0,\ c > 0$일 때, 그림 1.29에서와 같이 zx 평면 위의

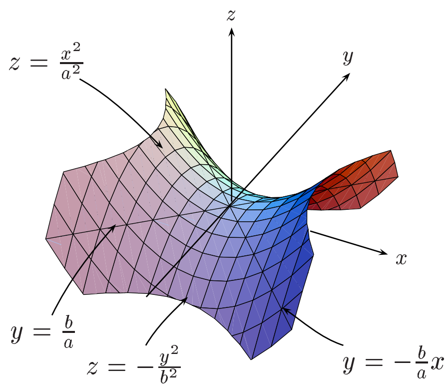

그림 1.28 쌍곡포물면의 안장점

쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ 을 z 축 둘레로 회전시켜 얻는 곡면의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.24}$$

이 된다. 이 회전쌍곡면은 z 축을 포함하는 평면과는 쌍곡선에서, z 축에 수직인 평면과는 원에서 만난다. z 축과 평행하면서 z 축과의 거리가 a인 평면은 이 쌍곡면과 두개의 교차하는 직선상에서 만난다. 예를 들어 평면 $x = a$와의 교집합은 점 $A(a, 0, 0)$에서 교차하는 두 직선

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \pm\frac{z}{c}$$

로 되어 있는 것을 알 수 있다. 이 쌍곡면과 xy 평면과의 교집합인 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 위에서 변수 x는 점 A에서 최대값을 가지는데, zx 평면과의 교집합인 쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ 위에서 변수 x는 점 A에서 극소값을 가진다. 따라서 점 A는 안장점이다. 실제로는 이 곡면 위의 모든 점이 안장점이다.

앞에서 회전시킨 쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$과 짝을 이루는 쌍곡선 $x^2/a^2 - z^2/c^2 = -1$을 z 축을 중심으로 회전시키면 이차방정식

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{1.25}$$

의 해집합인 이차곡면을 얻는다. 식 (1.25)를 z^2에 대하여 풀면

$$z^2 = c^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) \geq c^2$$

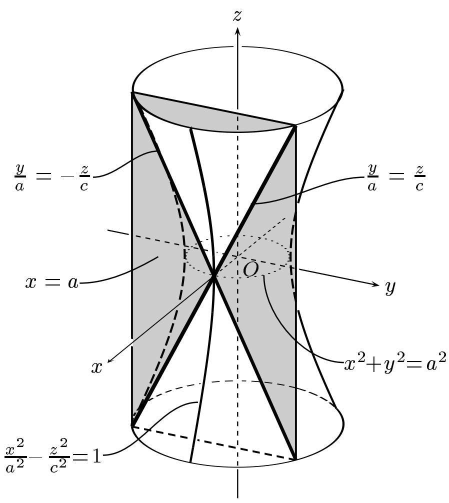

그림 1.29 회전쌍곡면

이되어 이 곡면은 $z \geq c$인 부분과 $z \leq -c$인 부분으로 나뉘어 있는 것을 알 수 있다. 이 두 종류의 회전쌍곡면을 구분하기 위하여 식 (1.24)의 곡면을 **일엽쌍곡면(hyperboloid of one sheet)**이라 부르고 식 (1.25)의 곡면을 **이엽쌍곡면(hyperboloid of two sheets)**이라고 부른다. 이 두 회전쌍곡면의 사이에는 식 (1.21)의 원뿔면이 들어 있다. 일엽쌍곡면과는 달리 이엽쌍곡면 위에는 안장점이 하나도 없다.

이 회전쌍곡면들보다 더 일반적인 방정식

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

의 해집합으로 주어지는 곡면을 **타원쌍곡면(elliptic hyperboloid)**라고 부른다. 이들도 회전쌍곡면의 경우와 같이 각각 일엽쌍곡면, 이엽쌍곡면으로 구별되어 불린다. 이들의 사이에는 식 (1.22)의 해집합인 타원뿔면이 놓여 있다. 회전쌍곡면의 경우와 같이 일엽타원쌍곡면 위의 모든 점은 안장점이고 이엽타원쌍곡면 위에는 안장점이 하나도 없다. (그림 1.30 참조.)

보기 1.7.5. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$

의 해집합의 제일팔분공간에 있는 부분을 원기둥좌표로 나타내어라.

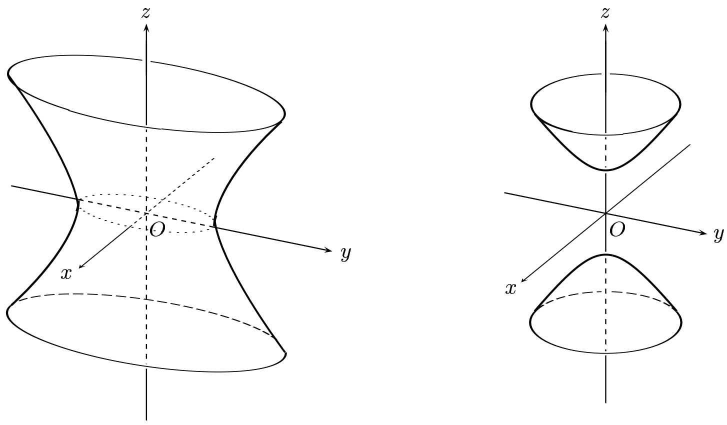

그림 1.30 일엽쌍곡면과 이엽쌍곡면

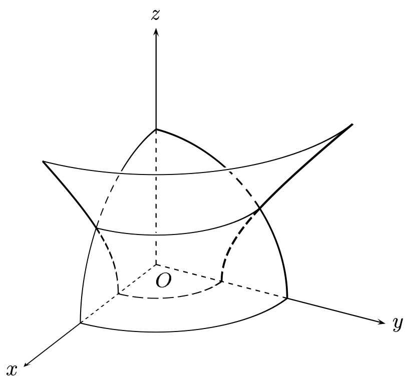

그림 1.31

$\boxed{\text{풀이}}$ $x^2 + y^2 = r^2$이므로,

$$\begin{cases} r^2 - z^2 \geq 1 \\ r^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$

을 얻는다. 따라서 구하는 집합은

$$\{(r, \theta, z) \mid \sqrt{1+z^2} \leq r \leq \sqrt{4-z^2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, z \geq 0\}$$

이 된다. (그림 1.31 참조.) □

연습문제

1. 다음 곡면을 그려라.

   (a) $x = y^2$
   (b) $x^2 + 4z^2 = 16$
   (c) $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$
   (d) $y^2 + z^2 = x^2$
   (e) $y^2 + z^2 - x^2 = 1$
   (f) $y^2 - x^2 = z$

2. 다음 영역의 부피를 구하라.

   (a) $x^2 + y^2/4 + z^2/9 \leq 1$
   (b) $x^2/4 + y^2/36 \leq z \leq 5$
   (c) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq h$

3. 쌍곡포물면 $z = x^2 - y^2$ 위의 점 $(a, b, a^2 - b^2)$을 지나고 벡터 $\mathbf{n} = 2a\,\mathbf{i} - 2b\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 에 수직인 평면과 이 쌍곡포물면은 교차하는 두 개의 직선에서 만남을 보여라.

4. (a) 두 개의 직선
   $$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{와} \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$
   를 각각 z 축의 둘레로 회전시키면 모두 일엽쌍곡면 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$을 얻게 됨을 보여라.

   (b) 쌍곡면 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 위의 임의의 점 (x_0, y_0, z_0)을 지나는 직선 중에서 이 쌍곡면 위에 놓여 있는 것을 모두 구하라.

5. 78쪽의 각주 14에 소개된 방법을 참고하여 다음 이차곡면의 종류를 말하시오.

   (a) $26x^2 - 20xy + 26y^2 + 9z^2 = 144$
   (b) $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2z^2 = 6$
   (c) $x^2 + y^2 = zx$
   (d) $x^2 - \sqrt{3}xy + z^2 = 2$

6. 모든 행벡터가 단위벡터이면서 서로 다른 임의의 두 행벡터가 서로 수직인 정사각행렬을 **직교행렬(orthogonal matrix)**이라고 부른다. 일차변환 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$의 행렬[17]이 직교행렬일 때, 임의의 집합 S와 $T(S)$는 기하학적으로 합동임이 알려져 있다.

   (a) 다음 3×3행렬 A는 직교행렬임을 보여라.
   $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

[17] 정의 1.5.19 이하 참조