# 김영욱의 기하학개론 강의록

고려대학교

# 머 릿 말

고려대학교에서 기하학개론 강의를 하면서 몇 가지 책을 교과서로 사용해 보았다. 그 중에는 Greenberg, Stillwell, Jennings가 있고 이 밖에도 사영기하 교과서와 Berger 같은 참고도서도 몇 있었다. 이들 모두 훌륭한 책이지만 우리 실정에 조금 맞지 않는 점이 있었다. 고등학교 기하학에서 다루는 내용이 점점 적어지게 됨에 따라 학생들은 일반적인 대학 기하학 교과서를 너무 어렵고 딱딱하게 느끼는 것 같다.

우리가 학생시절부터 기하학개론의 단골 메뉴는 사영기하학이었다. 사영기하학은 현대수학 공부를 시작하는 전환점에 배우기에 아주 적합한 주제이다. 가장 구체적인 기하학이면서도 추상성과 쌍대성 같은 수학의 구조 부분을 또 가장 쉽게 보여주는 과목이며, 기하와 대수학을 잘 섞어서 학문 분야의 융합 또한 정말 잘 보여준다. serious하게 접근하면 너무 어려울 수 있는 군(groups)의 이론이라든가 쌍대성(duality)의 이론, 그리고 추상기하학의 이론과 같은 것을 쉽게 예를 통하여 보여주는 장점을 두루 갖추고 있다.

나도 한 두해 사영기하학을 기하학개론 수업에서 강의해 보았다. 이런 많은 장점에도 불구하고 고전 사영기하학은 학부의 다른 과목들과 너무 동떨어진 느낌을 받았다. 이 내용을 잘 이해하는 것이 현대수학에 첫걸음을 잘 딛게 해 주는 것임에는 틀림 없지만, 그리고 공리론적인 접근과 수학이론의 존재성 등의 철학적 문제는 학부 수학 다른 어떤 곳에서도 다루기 힘든 것이지만 (한번은 꼭 생각해야 하는 문제임에 틀림

없다.) 이런 문제에 너무 치우치다 보면 다른 과목의 공부에 직접적인 도움이 덜 되는 것도 사실이다.

Smirnov의 대학 교과서 시리즈를 보며 느끼는 것은 학부 수학을 가르치되 한 과목 한 과목이 따로 따로가 아니라 이 모든 과목이 하나의 이론에서 부분 부분을 이야기하고 있는 것이라고 할 수 있어야 한다는 것이고, 이 모든 것에서 구조와 형식을 강조하는 Bourbaki의 생각은 꼭 필요한 것이지만 이것을 초장에 학생들에게 강조할 필요는 없다고 생각하고 보면, 아마도 학부에서 학생들이 잘 배워냈으면 하는 것은 다음과 같은 것이 아닐까 한다.

21세기를 들어선 마당에 우리에게 필요한 것은 현대사회는 살아가면서 활용도 높은 이론을 배워야 할 것이다. 이것은 단순히 많이 사용되는 계산법을 의미하는 것은 아니다. 아마도 가장 많이 사용되는 것은 중 고등학교 수학들일 것이다. 그러나 우리가 바라는 활용도는 어느 누구도 맞닥뜨렸을 때에 손쉽게 해결할 수 있는 문제에 대한 활용도가 아니다. 이런 활용도는 아무리 자주 있어도 활용도가 높다고 할 수는 없다. 오히려 자주 마주치지 않아도 한 번 마주쳤을 때 보통 사람들은 해결할 줄 모르고 수학과 학생들과 같은 고급 수학 사고를 단련한 사람들만이 해결할 수 있는 문제에 활용가능한 것이 진짜로 높은 활용도를 가지고 있다고 할 수 있다.

이런 관점에서 보면 단순히 공식을 외우고 풀이법을 가진 내용을 공부하는 것도 중요하겠지만 오히려 이런 수학들을 전체적으로 아우르고 이들의 관계를 보면서 고정된 관념으로는 보기 힘든 것을 찾아낼 수 있는 것이 중요하다고 생각된다.

학부 수준에서 이러한 것은 무엇이 있는가? 당연히 학부의 모든 과목이 이런 것이지만 전체적으로 아우르는 한 가지 관점을 뽑아보라면 역시 미적분의 계산이다. 물론 최대, 최소 문제와 같은 단순한 계산문제를 뜻하는 것은 아니다. 이런 것이 잘 적용되지 않을 때 문제를 해결할 수 있는 단서를 찾아내고 정확한 계산이 불가능할 때에도 개략적인 수치적 단서나 또는 연속성과 같은 성질을 통한 구하는 답의 정성적 성질을 찾아내는 것 등은 고급 미적분학, 즉, 해석학이다.

특히 이런 문제를 다루려면 일반적인 함수의 성질을 잘 파악하고 있어야 하고, 구체적인 계산과 연계시키려면 적어도 1차함수와 2차함수를 잘 다룰줄 알아야 한다. 따라서 학부 해석학과 선형대수학을 잘 이해하고 활용할 수 있게 만들면 더 바랄 나위가 없겠다.

이런 관점에서 볼 때 학부 2학년에서 공부하는 해석학과 선형대수학에 도움이 되는 과목이 되는 것이 수학과 학부에 들어와서 처음 공부하는 기하학개론의 한 가지 목표가 되어야 할 것이다. 이런 목표에 도움이 되도록 하려고 생각한 것은, 비록 고전기하학의 강의지만 그 내용을 되도록 미적분학에 맞추고, 공리와 논리가 가장 선명한 기하학이지만 이보다는 계산과 해석학적 성질에 초점을 맞추며, 군의 구조가 잘 들어나는 이론임에도 구체적인 표현의 계산적 성질을 들여다 봄으로써 계속되는 수학 공부에 직접 연계되고, 미적분학, 행렬론 등에서 공부한 내용들을 구체적인 기하에 활용해봄으로써 이 계산법을 더 확고하게 익힐 수 있도록 방향을 잡는 것이다.

이 강의록은 전반적으로 유클리드와 비유클리드 기하학의 초보적 내용만을 다룬다. 특히 기하학의 깊이있는 이해를 목표로 하기 보다는 각 기하학의 유사성과 이에 관련된 계산법의 유사성을 보는 데에 중점을 두었으며 기하학적인 증명법보다는 미적분과 해석기하를 통한 증명을 하려고 노력하였다. 특히 학부 1학년의 미적분학과 약간의 행렬, 벡터만을 사용해서 우리가 해볼 수 있는 모든 것을 기하학을 통해서 해보려 하고 있다고 생각하면 접근하기 쉬울 것이다.

이 강의록의 내용은 유클리드 기하, 구면 기하, 사영 기하, 그리고 쌍곡 기하로 되어 있다. 시간이 있으면 로렌츠-민코프스키 공간의 기하를 덧붙였으면 한다. 이 각각의 기하에서 우리가 중요하게 보려고 하는 것에는 길이, 거리, 넓이(부피)의 개념과 이의 계산법과의 관계, 각 기하에서의 직선의 개념과 이와 관련된 계산, 각 기하의 특징을 잘 보여주는 한 두 가지 공식 (특히 cosine 법칙), 클라인의 관점에서 이 기하를 특징지워주는 소위 동형사상군의 표현과 계산, 그리고 이들 기하에서 공통적으로 잘 사용되는 좌표계의 계산 정도를 들 수 있다.

이 강의록은 미적분을 통한 접근에서 자칫 잘못하면 미분기하로 빠질수 있는 점을 방지하느라고 노력하였다. 미분기하적 관점 자체를 무시할 수는 없지만 우리는 미분을 사용함에도 그리고 isometry 를 다룸에도 최대한 순수한 미적분학의 계산과 초등적인 기하학적 직관만을 사용하려고 노력하였으며 계산이 복잡하더라도 곡률의 개념을 도입하지 않았다. 따라서 우리가 다루는 내용도 이것이 가능한 부분에 국한하였다. 물론 계산 중에는 implicit 하게 곡률 계산이 들어 있는 부분이 있더라도 1 학년 학생들의 수준에서 쉽게 따라갈 수 있는 계산의 과정에서 보이는 부분 정도이며 의도적으로 곡률을 사용하지는 않았다.

우리에게 필요한 계산법 가운데 선형대수 부분을 앞부분에서 간략하게 다루었다. 여기서도 선형대수의 eigenvalue 와 같은 것을 언급하였지만 기본되는 문제에서 자연스럽게 나타나는 정도와 한 두 가지 아이디어의 사용만으로 이해되는 정도를 넘지 않았다. 특히 고등학교 수준의 행렬 계산에서 이 몇 가지 아이디어를 따라 계산해 보는 수준으로 설명하였으므로 너무 깊은 이론을 강요한다고 생각하지는 않는다.

역시 이 기하학 강의록은 그 동안 가장 여러번 교재로 사용했던 Jennings 의 교과서를 많이 따랐다. 어쩔 수 없이 가장 쉽고 가장 계산적이면서도 그 계산 속의 기하학적 아이디어를 비교적 잘 보여주는 교과서였기 때문이다. 이 교과서에서 조그만 문제점이라면 쌍곡기하에 대한 언급이 없다는 것이다. 이 강의록을 작성하면서 쌍곡기하를 미분기하 없이 계산하는 것이 쉽지 않다는 것을 다시 확인하였지만 그래도 조금은 아쉽다. 몇 가지 증명은 더 낫거나 기초적인 방법으로 바꾸려고 노력하였으나 미흡하다. 그림을 더 많이 넣어야 하는데 시간 부족으로 아직 많은 부분에 추가하지 못하였다. 이 강의록을 쓰는 데 참조한 문헌들은 강의록 마지막 부분에 적어 두었다.

시간에 쫓겨서 강의록을 만드는데 일부 그림을 그려주고 잘라 붙이는 작업을 도와준 홍영준군에게 고마움을 표한다.

2008 년 여름<br>김영욱<br>안암동 애기능 캠퍼스에서

# Contents

CHAPTER 1

# 유클리드 공간의 기하

1. 넓이와 행렬식
2. 행렬과 선형대수
3. 노옴과 내적
4. 유클리드 공간의 움직임
5. 가장 짧은 곡선

## 1. 넓이와 행렬식

**이 절의 목표**

(1) 단위 정사각형의 넓이가 1 이고, 영역을 두 부분으로 나누었을 때 각각의 영역의 넓이의 합이 전체 영역의 넓이라는 성질만을 가지고 평면에서의 넓이를 정의할 수 있음을 알아본다. 특히 이 성질은 평면의 벡터에 대한 행렬식을 정의하는 성질과 동일한 것임을 알아본다.

이로부터 평행사변형의 넓이가 왜 행렬식의 값으로 표현되는가를 이해한다.

(2) 삼각형의 넓이공식을 일반화하여 다각형의 넓이 공식과 미적분학에서 선적분에 의한 공식을 유도할 수 있다.

(3) $\mathbb{R}^3$ 의 평행육면체의 넓이가 꼭지점의 행렬식으로 표현됨을 증명한다.

(4) $\mathbb{R}^3$ 의 평행사변형의 넓이가 두 변의 외적의 크기로 표현됨을 알아본다.

**들어가기** 고등학교 때 그리고 대학 1 학년에서 행렬식에 대하여 공부하였다. 모두들 행렬식을 어떻게 계산하는지는 잘 알고 있다. 그리고 크기가 같은 정사각행렬 $A$, $B$ 가 있으면 그 곱의 행렬식이

$$|AB| = |A|\,|B|$$

를 만족시킨다는 것을 알고 있는 사람도 많이 있다. 그렇지만 행렬식이란 무엇인가 하고 물으면 답하기가 쉽지 않다.

이 절에서는 초등학교로 돌아가서 우리가 넓이를 공부하였던 때를 돌아보고 넓이를 공부하던 과정이 행렬식을 공부하는 과정과 닮았다는 것을 알아보려고 한다. 이것을 알고 나면 행렬식이란 다각형 / 다면체의 넓이, 또는 일반적으로 넓이를 계산하는 방법이라는 것을 금방 알아볼 수 있다. 또 우리가 여기저기서 보는 많은 넓이와 부피 공식들이 행렬식을 가지고 나타내어진다는 것을 알 수 있다.

행렬식을 정의하는 방법은 몇 가지 있다. 여기서는 행렬을 공부할 때 잘 사용하는 한 가지 방법으로 $2 \times 2$-행렬의 행렬식을 정의하는 것을 보자. 이 때, $2 \times 2$-행렬의 경우만 보면 일반적인 차원에서는 어떻게 하는 것인지도 바로 알 수 있다.

**1.1. 행렬식의 정의** 보통 $2 \times 2$ 행렬의 행렬식

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

은 수학 계산의 여러 곳에 나타난다. 이러한 계산 경험만으로도 이 값이 중요하다는 것을 알 수 있지만 이 값은 무엇일까? 여러 곳에서 여러 맥락으로 나타나는 $ad - bc$ 이지만, 우리는 평행사변형의 넓이라는 관점에서 보려고 한다. 즉, 위의 행렬식의 절대값 $|ad - bc|$ 는 두 벡터 $(a, b)$ 와 $(c, d)$ 를 두 변으로 갖는 평행사변형의 넓이와 같다.

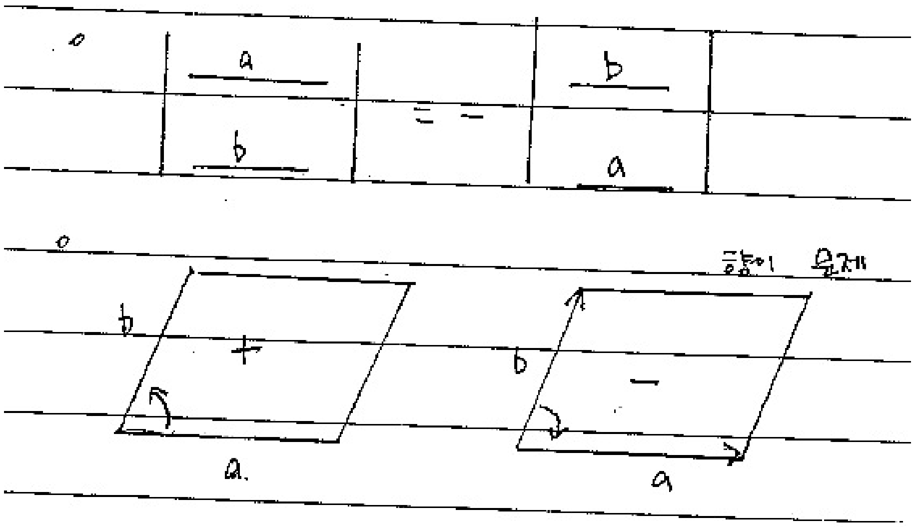
정리 1.1. $(a, b)$ 와 $(c, d)$ 를 두 변으로 갖는 평행사변형의 넓이는 $|ad - bc|$ 이다.

이 정리는 초등기하를 사용하여 확인할 수 있다.

문제 1.1. $a > c > 0$, $d > b > 0$ 일 때 위의 정리가 성립함을 도형을 사용하여 증명하여라.

그러나 여기서는 조금 색다른 방법을 써서 알아보려고 한다. 우선 두 벡터 $\mathbf{x} = (a, b)$ 와 $\mathbf{y} = (c, d)$ 를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 의 함수이다.

여기서 평행사변형의 넓이는 양수이다. 그러나 우리는 조금 다르게 생각하려고 한다. 마치 정적분을 계산하던 것처럼 하자.




두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 가 만드는 평행사변형의 넓이와 두 벡터 $-\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 가 만드는 병행사변형의 넓이가 똑같지만 $\mathbf{x}$ 의 방향에 따라 하나는 양수 또

## 2. 행렬과 선형대수

**이 절의 목표**

(1) basis 라는 개념을 알아본다.
(2) $\mathbb{R}^2$ 의 basis 를 하나 잡자. 벡터를 이 basis 의 일차결합으로 나타날 때 계수는 어떻게 계산하는가 알아본다.
(3) $\mathbb{R}^2$ 의 벡터에 행렬을 곱하는 것은 1 차함수임을 알아보고 basis 를 달리 잡을 때 이 basis 에 대한 좌표에 대하여는 어떤 행렬을 곱하는 것과 같은가? 이 행렬을 구하는 방법을 알아본다.
(4) 2 차함수가 있을 때 이 함수의 기하학적 특성을 잘 나타내는 좌표를 찾는 방법을 알아본다.
(5) 2 차함수의 최대 최소 문제를 풀고 그 특성을 알아본다.

**들어가기** 고등학교 때 행렬과 행렬식의 계산법을 공부하였다. 행렬의 계산은 복잡한 듯 하지만 매우 유용한 계산법이어서 여러 곳에서 나타난다. 단순한 문제에서는 고등학교 때의 행렬 계산법으로도 충분하지만, 조금만 복잡한 문제에 닥치면 이로는 충분하지 않다. 좌표의 방향을 바꾸고 좌표의 scale 을 늘이거나 줄이면 어떻게 계산하여야 하는가 하는 것은 많은 문제를 해결하는데 필요한 기법이다. 한편, 변수가 2 개 이상인 2 차함수를 다루려면 고등학교의 계산법보다 고차원적인 계산기법을 동원하여야 한다.

이 절에서는 단순히 $\mathbb{R}^2$ 에서의 1 차함수와 2 차함수를 다루는 법을 알아본다. 벡터는 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 와 같이 bold 체를 사용한다. 벡터는 될 수 있으면 열벡터를 사용한다.

**2.1. Basis 란 무엇인가?** 평면 $\mathbb{R}^2$ 에서 서로 방향이 다른 0 이 아닌 두 벡터를 잡았을 때, 이 두 벡터를 $\mathbb{R}^2$ 의 basis 라고 한다. 여기서 서로 방향이 다르다는 것은 이 두 벡터 가운데 하나가 다른 하나의 실수배가 되지 않는다는 뜻이다.

이런 두 벡터는 어떤 점이 좋은가? 이런 두 벡터를 가지고 있으면 평면의 모든 벡터를 이 두 벡터를 가지고 상수배와 덧셈으로 표현할 수 있다. 뿐만 아니라 이렇게 표현하는 방법은 단 한 가지씩뿐이다.

예를 들어보자. 평면의 두 벡터 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ 를 잡으면 이 두 벡터는 서로 수직이어서 이 가운데 하나의 실수배를 하여 다른 하나를 만들 수 없다. 이 두 벡터는 0 벡터가 아니므로 평면의 basis 를

이룬다고 할 수 있다. 이제 평면의 임의의 벡터 $\mathbf{x} = (x, y)$ 를 잡으면

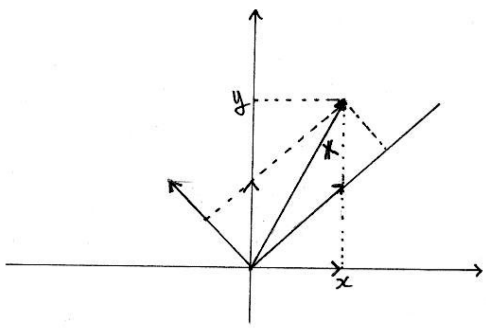
$$\mathbf{x} = x(1,0) + y(0,1) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

라고 쓸 수 있다. 이 때, $x, y$ 를 basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 에 대한 계수 또는 좌표라고 한다. 이렇게 두 벡터 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 에 계수 $x$, $y$ 를 곱해서 더한 것을 이 두 벡터의 일차결합이라고 부른다. 또, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 는 standard basis 라고 부른다.

그러면 basis 를 $\mathbf{w}_1 = (1,1)$, $\mathbf{w}_2 = (-1,1)$ 이라고 잡으면 어떤가? 간단한 계산을 통해

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{-x+y}{2}(-1,1) = \frac{x+y}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{-x+y}{2}\mathbf{e}_2$$

임을 알 수 있다. 따라서 이 새 basis 에 대한 좌표는 $(\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2})$ 가 된다.




문제 2.1. 0 벡터가 아닌 두 벡터 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ 를 잡을 때, 이 두 벡터가 평행하기 위한 필요충분조건은 이 두 벡터로 만든 행렬의 행렬식이 0 이라는 것임을 보여라.

**2.2. Basis 변환** 우선 여기서는 $\mathbb{R}^2$ 의 basis 를 임의로 하나 잡을 때, $\mathbb{R}^2$ 의 벡터를 이 basis 의 일차결합으로 쓰고자 하면 그 계수를 어떻게 찾는가 하는 문제를 풀고자 한다.

임의로 잡은 basis 를 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 라고 하자. 이들을 열벡터로 하는 행렬을

$$P = [\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2] = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

# 참고 도서

이 강의록을 작성하는데 참조한 책, 공부하면서 읽으면 도움이 될 책, 더 어려운 내용을 찾아볼 수 있는 책, 이 강의를 들은 후에 더 공부할 수 있는 책 등.


(1) Ahlfors, Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill (1979).

(2) Berger, Geometry I, II, Springer (1987).

(3) Jennings, Modern Geometry with Applications, Springer (1997).

(4) Greenberg, Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, (1980, 1994, 2007).

(5) Hartshorne, Foundations of Projective Geometry (Harvard Lecture Note), Benjamin (1967).

(6) Pedoe, Geometry: A Comprehensive Course, Dover (1988).

(7) Stillwell, Geometry of Surfaces, Springer (1995).

(8) 김명환, 김홍종, 현대수학입문, 경문사 (2000).

(9) 양성덕, 양성덕의 미분 기하 강의록, 고려대학교 수학과 (2003, 2007, 2008).

(10) 深谷賢治, 雙曲幾何, 岩波書店 (1996).