들어가기

다변수 복소함수론은 20세기에 들어오면서 발전된 학문의 분야이다. 포앙카레가 기하학적 함수론의 기초를 세운 이래 다변수 복소함수론은 지난 한 세기 동안 괄목할 만한 발전을 보였다. 단순한 일변수 복소함수론의 일반화로서 시작된 이 학문은 20세기의 새로운 학문적 움직임을 따라 여러 방향으로 발전하여 왔다. 그 가운데 크게 주목하여야 할 것으로 다음 네 가지를 들 수 있다.

우선 20세기 전반에 큰 전기를 이룬 대수기하학의 발전과 함께하여 대수기하학의 구체적인 모델로서 발전의 방향을 제시해 주며, 또 대수기하학의 새로운 연구기법을 받아들여 방법론의 획기적인 전환을 일으켰다. Nevanlinna에 의한 함수 값의 분포에 대한 이론이나 K. Oka가 풀어낸 레비문제는 20세기 수학에서 드물게 중대한 업적의 하나이다.

이러한 발전의 뒤를 이어 50년대 말부터 새로운 방법론인 미분방정식 이론이 접목되었다. Hörmander, Kohn 등으로 대표되는 이러한 방법론은 대수적 방법을 통해 큰 틀을 잡은 이 학문에 섬세하고도 미묘한 부분을 다룰 수 있는 새로운 관점을 주었다. 이를 통해 강준볼록영역(strongly pseudoconvex domain)이 연구 중심에 자리하게 되었으며 볼록성을 이해하는 데 새로운 전형(paradigm)제시하였다고 하겠다.

이러한 관점의 변화는 계속하여 70년대 초반에 등장한 영역의 경계의 모양에 대한 두 가지 결과로 이어진다. 그 하나는 Chern과 Moser의 미분기하학적 불변량에 의한 영역의 모양의 연구이고, 또 하나는 C. Fefferman의 점근해석적 방법에 의한 영역의 경계의 모양이다. 이 두 가지 연구결과는 모두 해석학적 문제와 기하학적 문제의 미묘한 관계를 드러내 보여주는 것들이다. 그리하여 앞의 이론은 CR다양체의 중요성을 일깨워주었으며, 뒤의 이론은 영역의 내부의 이론과 경계의 이론을 연결짓는 연결고리로서 역할을 하게 되었다.

한편 Kobayashi는 전대의 Carathéodory에 의하여 고안된 영역 내부의 기하학적 불변량을 본따서 새로운 불변량으로서 영역위의 위상적 거리함수를 만들어냈다. 이 불변량은 영역의 모양을 가늠하는 방법으로 영역의 경계의 모양을 보는 대신 영역의 내부의 모습을 보는 것으로 전환시켰다. 이러한 거리구조의 구성은 미분기하학의 전형적인 방법을 따라 이루어지며 일반적으로 Finsler기하학이라고 불리는 이론에 해당하는 것이다. 이 이론은 앞의 Fefferman의 이론 등과 결합하여 경계와 내부의 해석학 및 기하학을 연결지어 이해하는 방법론으로 현재의 함수론의 중요한 연구 대상이 되고 있다.

이 책에서는 이러한 배경을 중심으로 하여 기하학적 함수론을 바라보는 한 가지 관점에 대하여 서술하고 있다. 우리는 고전적인 해석학의 관점을 벗어나서 20세기 중반에 발전된 위의 여러 가지 이론을 통합하여 바라볼 수 있게 해 주는 여러 결과를 중심으로 서술하였으며, 이러한 관점의 배경이 되는 미분기하학 및 거리기하학을 바탕으로 하려고 노력하였다. 이러한 방법론은 1970년대에 들어 Griffiths, Greene, Wu 등을 중심으로 발전한 기하학적 함수론이라 불리는 이론으로서 고전적 방법과 함께 근래의 다변수 복소해석학 연구의 중심을 이루고 있다.

이 책은 크게 두 부분으로 이루어져 있다. 앞 부분은 제 1장에서 제 3장까지로 주로 코바야시와 로이든에 의하여 정의되고 발전된 불변거리의 구성과 기초적 응용에 관한 것이다. 이에 반하여 뒷 부분을 이루고 있는 제 4장에서 제 6장까지의 이론은 더욱 미분기하학적인 색채를 띠는 것이며 위에서 이야기한 목표에 근접한 것이다.

제 1장에서는 원판의 포앙카레 거리, 코바야시의 거리함수와 그의 완비성 및 쌍곡성의 정의와 기본성질을 다루고 있다.

제 2장에서는 복소다양체의 미분계량의 관점에서 로이든이 개량한 코바야시 거리(계량)을 다룬다. 이러한 무한소적 방법을 쓰면 코바야시 거리를 다루기가 한층 쉬워지며 많은 미분기하학적 도구를 쓸 수 있

다. 특히 브로디, 한경택, 김강태 등에 의한 쌍곡성의 판정법과 Greene, Wu에 의한 완비쌍곡성의 판정법을 소개한다. Greene-Wu의 정리의 증명에 필요한 Milnor에 의한 실(實) 다양체의 포물 및 쌍곡성의 판정에 관한 정리 및 증명도 함께 실었다.

제 3장에서는 불변계량의 응용의 고전적이고 대표적인 예로서 피카드의 정리들을 소개한다. 피카드의 작은정리 및 이와 연관된 여러 형태의 슈바르츠의 도움정리들은 해석사상이 불변사상에 대하여 거리 감소사상임이 그 주제이다. 한편 피카드의 큰 정리의 중심이 되는 쌍곡성과 해석함수의 확장성은 곽명혜의 일련의 정리들을 시발점으로하여 Kiernan과 코바야시에 의하여 쌍곡묻힘의 개념으로 정립되었다.

제 4장에서는 Eisenman, 코바야시 등에 의하여 정의된 쌍곡측도의 미분기하학적 의미를 해석직선다발의 곡률의 개념을 통하여 알아본다. 쌍곡측도는 코바야시 거리의 개념을 측도에 적용하여 만든 것으로, 해석사상이 쌍곡측도 감소 성질을 가지게 되는 복소 영역의 불변량의 하나이다. 여기서는 쌍곡 측도와 함께 이의 무한소형태인 쌍곡부피형식의 성질을 알아본다. 특히 쌍곡부피형식에 대하여는 이의 리치곡률을 정의할 수 있으며 이를 통하여 다양체가 측도쌍곡성을 갖게 되는 조건을 찾을 수 있다.

제 5장은 복소다양체의 버그만계량의 성질에 관한 것이다. 첫 절에서는 슈타인다양체의 정의와 이를 판정하는 기하학적 방법에 대하여 소개한다. 그 다음절에서는 유계영역의 버그만 계량의 정의에 대하여 간단히 서술하고는 일반적인 복소다양체에서 이를 정의하는 방법을 알아본다. 그리고 이러한 버그만계량이 완비이기 위한 기하학적(곡률의) 조건에 대한 Greene-Wu의 결과를 서술한다. 마지막으로 다시 유계영역의 경우로 돌아가서 어떻게 Fefferman의 결과를 써서 영역의 버그만핵의 고차항인 버그만계량의 곡률에 대한 정보를 얻을 수 있는가에 대한 Klembeck 등의 결과를 이야기한다.

제 6장은 강준볼록영역의 경계의 모양과 이에 의한 불변거리의 계산이다. 이에 대하여 제일 먼저 Graham에 의한 경계 근처에서의 코바야시 거리의 계산을 소개한다. 그 다음에는 다변수 복소함수론의 핵심이 되는 Hörmander의 $\bar{\partial}$–방정식의 풀이를 기하학적 관점에서 이해하여 Andreotti-Vesentini 등의 풀이와 연관하여 설명한 Greene-Wu의 결과를

소개한다. 특히 함수해석학적 테크닉이 어떻게 해석직선다발의 계량과 연관되는가는 흥미로운 결과이다. 마지막으로는 Graham의 연구에서 한발 나아가 Klembeck에 의한 버그만 핵의 계산을 써서 Bland가 밝힌 완비켈러다양체가 $\mathbb{C}^n$의 유계영역과 해석동형이 되는 조건에 대하여 서술하였다.

이 책의 구성은 저자가 박사과정과 그 이후 수년 동안 연구하였던 내용의 일부이다. 기하학적 함수론과 관련하여는 방대한 문헌이 있으나 여기서는 극히 일부만을 소개할 수 있었다. 특히 Nevanlinna 의 이론 등은 이 책의 저술을 시작할 때는 계획에 있었으나 저자의 능력 부족 등으로 싣지 못한 부분이며, 다른 수학자의 손을 통하여 소개될 수 있기를 바란다. 한편 기하학적 함수론과 관련하여는 이 밖에도 많은 결과들이 있다. 흥미를 가진 독자를 위하여는 책의 끝부분에 소개된 도서들을 참고하기 바란다. 특히 코바야시 교수가 최근에 저술한 Hyperbolic Complex Spaces는 이 방면의 방대한 결과들을 총망라하는 대단한 업적이라고 생각된다. 이 밖에 불변거리에 대한 우리말의 概說논문인 김강태교수의「Wu 불변거리 연구에 관하여[2]」는 이 책의 내용과 관련된 결과들을 잘 요약 설명하고 있으며 그 뒤를 이어 나온 이 방면의 연구성과들을 소개하고 있다.

이 책이 씌어지기까지는 여러분들의 노력과 수고가 있었다. 저자에게 복소기하학을 처음 소개하고 가르쳐 주신 한경택 교수님과 저자의 박사학위 연구를 지도하고 이 책의 내용의 많은 부분을 지도해주신 Greene 교수님, 이 책의 저술을 시작하도록 격려하여주신 故 김종식 교수님, 저자의 관심을 자극해 주고 공부가 부족한 점을 많이 지적해준 김강태 교수와 이 책의 출판에 물심 양면으로 도움을 주신 고려대학교 출판부에 감사를 드린다. 마지막으로 이 책이 나오기까지 저자의 짧은 일본어를 도와주신 어머님과 어려움을 참고 도와준 아내 혜문, 딸 율희, 민희에게 고마움을 전한다.

목 차

제 1 장

코바야시 거리

유클리드 복소공간 $\mathbb{C}^n$ 안의 영역위에서 해석학을 연구하려면 그 영역의 기하학적인 성질들이 매우 중요하다는 것을 이미 보아 알고 있다. 복소 일차원의 경우에는 리만의 사상정리가 있어서 원의 내부와 위상적으로 같은 영역들은(전공간만을 제외하고는) 복소구조도 서로 같다는 것을 알 수 있다. 이를 일반화해서 영역에 구멍이 유한개가 있는 경우에도, 어떤 영역들이 서로 같은 복소구조를 가지는가를 매개변수 유한개로써 분류해낼 수 있다. 그러나 이런 문제들은 고차원으로 올라오면 상상할 수 없을 정도로 복잡하여지며 일차원에서와 같은 쉬운 분류는 바랄 수 없게 된다.

다변수 복소함수론에서 영역의 가장 기본적인 해석학의 성질들은 그 영역의 경계의 형태로부터 나온다. 우리는 다변수 복소함수론에서 준볼록(pseudoconvex) 또는 강준볼록(strongly pseudoconvex)이라는 성질이 중요한 역할을 하고 있음을 알고 있고, 또 이러한 성질들은 그 영역 위에서의 $\bar{\partial}$–방정식과 밀접한 관계를 갖고 있음도 잘 알고 있다. 그러나 이러한 성질들에 대한 연구는 그 자체만으로는 어려우며 따라서 다른 여러 가지 방법을 생각하게 한다. 경계의 형태에 대한 연구는 뒤로 미루고 이 장에서는 영역 내부의 기하학적인 성질들을 알아보자.

제 1 절 포앙카레 거리

$\mathbb{C}^n$ 안의 유계영역 D위에 주어진 기하학적인 구조로서 복소해석학에 도움을 줄 수 있으려면, 복소 해석적으로 같은 영역들에서는 그 기하학적 구조도 같다고 할 수 있어야 한다. 기하학적으로 가장 기본적인 구조가 거리구조라면 이러한 거리구조는 다음과 같은 성질을 필수적으로 갖추어야 할 것이다. 즉, 이론의 대상이 되는 각각의 영역 D 위에 거리구조 ρ_D 가 정의되어야 하며, D_1과 D_2가 $\mathbb{C}^n$의 임의의 영역이고 이 두 영역 사이에 해석동형사상(biholomophic map)

$$f : D_1 \longrightarrow D_2$$

가 있으면 이 영역들 위에 정의된 거리함수 ρ_1 과 ρ_2 에 대하여 앞의 해석동형사상은 등거리사상(isometry)이라야 한다.(즉, $\rho_1(x,y) = \rho_2(f(x), f(y))$ 이다.)

이런 거리의 시초가 되는 예로서 단위원판 위에 정의된 포앙카레의 거리 구조가 있다. 우리가 연구하려는 목적이 원판 위에서의 복소함수론이라면 원의 크기의 차이는 해석학에 별다른 영향을 주지 않으므로 단위 원판만을 생각하여도 된다. 이 때, 단위 원판 Δ의 중심을 원점에 놓고, 원판 위의 두 점 P, Q 사이의 거리를 다음과 같이 정의한다.

먼저 Δ 안에서 정의되고 두 점 P, Q를 잇는 조각매끄러운(piecewise smooth) 곡선들에 대하여 길이를 정의하자.

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \Delta$$

가 이러한 곡선이라면, γ의 길이를

$$\text{Length}(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|dt, \quad F(\gamma(t)) = \frac{1}{1 - |\gamma(t)|^2}$$

로 정의하고, 이러한 모든 γ에 대하여 Length(γ)의 하한(infimum)을 P와 Q 사이의 거리 $\rho(P, Q)$라고 정의한다. 이를 단위원판 위의 **포앙카레 거리**라고 한다. 이 거리는 리만계량을 써서 다음과 같이 정의할 수 있다. 단위 원판 위에 각 점 $z = x + \sqrt{-1}y$ 에서의 계량을

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{1}{(1 - (x^2 + y^2))^2}(dx^2 + dy^2)$$

라고 주면 이 리만 계량은 포앙카레 거리를 정의한다고 볼 수 있다. 이 때 포앙카레 거리는 구체적으로 다음과 같이 주어진다. 증명은 단순한 계산이다.

도움정리 1.1 Δ *위에서* 0 *에서* $r(< 1)$ *까지의 거리는 다음과 같이 주어진다:*

$$\rho(0,r) = \int_0^r \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r} \tag{1.1}$$

이 때 다음 정리가 성립한다.

정리 1.2 (슈바르츠 도움정리; Schwarz-Pick Lemma) *단위원판* Δ*에서 정의된 자기자신으로의 정칙사상은 포앙카레 거리를 증가시키지 않는다.*

[**증명**] 이 정리의 증명은 다음 사실만 보이면 충분하다.

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqq \frac{1}{1-|z|^2}$$

Δ 안의 한점 a를 고정하고

$$g(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \qquad h(z) = \frac{z-f(a)}{1-\overline{f(a)}z}$$

라고 정의하면 g와 h는 각각 0을 a로 보내고 $f(a)$를 0으로 보내는 단위원판위의 해석동형사상이다. 이 때 $F = h\circ f\circ g$ 라고 정의하면 F는 Δ에서 Δ로의 해석사상이며 $F(0)=0$ 이다. 여기서 $F'(0)$를 계산하여 보면

$$F'(0) = h'(f(a))f'(a)g'(0) = \frac{1-|a|^2}{1-|f(a)|^2}\,f'(a)$$

와 같다. 복소함수론에서 슈바르츠의 도움정리로 부터 $|F'(0)| \leqq 1$ 이므로

$$\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leqq \frac{1}{1-|a|^2}$$

이다. 또 등호는 F와 f가 해석동형사상일 때만 성립한다. □

따름정리 1.3 Δ*의 동형사상은 포앙카레 거리에 대한 등거리사상이다.*

복소평면의 좌표를 $z = x + \sqrt{-1}y$ 라고 나타내며 이 좌표함수와 그 켤레함수 $\bar{z}$의 미분을

$$dz = dx + \sqrt{-1}dy, \qquad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy$$

라고 정의한다. 이는 실수함수의 미분 d를 복소선형이 되도록 확장한 것이다. 복소평면에서의 방향벡터는 이 미분들의 쌍대바탕벡터로 정의한

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

들의 일차결합으로 나타낼 수 있다. 이러한 접벡터들의 공간에 정의되는 이차텐서 가운데 기본이 되는 것을

$$dzd\bar{z} = \frac{1}{2}(dz \otimes d\bar{z}) = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

이라고 나타내기로 한다.

U가 $\mathbb{C}$의 열린 집합일 때 이 집합 위에 정의된 텐서

$$g = 2a(z)dzd\bar{z}$$

를 **에르미트 계량**(Hermitian metric)이라 부른다. 여기서 $a(z) > 0$는 U위에서 $\mathcal{C}^{\infty}$ 함수이다. 이제 에르미트 계량보다 조금 일반화된 에르미트 준계량을 정의하자. U위에 주어진 2차대칭텐서 $h = 2a(z)dzd\bar{z}$ 에서 $a(z)$가 다음 세 조건을 만족하면 h를 U위의 **에르미트 준계량**(Hermitian pseudometric)이라 한다:

(1) $a(z)$는 연속인 실함수이고, $a(z) \geqq 0$이다.

(2) $\mathrm{Zero}(h) = \{z \in U \mid a(z) = 0\}$는 U안에서 이산(discrete)집합이다.

(3) $a(z)$는 $U - \mathrm{Zero}(h)$ 위에서 $\mathcal{C}^{\infty}$함수이다.

여기서 $\mathrm{Zero}(h) = \varnothing$이면 h는 물론 에르미트계량이다. 따라서 에르미트 계량은 에르미트 준계량의 특별한 경우이다. 예를 들어 $f(z)$가 U위에서 항등적으로 0이 되지는 않는 해석함수일 때, $a(z) = |f(z)|$라 잡으면 위의 세 조건을 만족하므로 $h = |f(z)|dzd\bar{z}$는 U 위의 에르미트 준계량이 된다. 에르미트 준계량 $h = a(z)dzd\bar{z}$의 **가우스(Gauss)곡률** $K_h : U \to$

$[-\infty,\infty)$를 다음과 같이 정의한다. $z \in \mathrm{Zero}(h)$ 이면 $K_h(z) = -\infty$ 라 하고, $z \in U - \mathrm{Zero}(h)$ 이면

$$K_h(z) = -\frac{1}{a(z)}\frac{\partial^2 \log a(z)}{\partial z \partial \bar{z}}$$

라 정의한다. $w = w(z)$가 $\mathbb{C}$의 열린집합에서의 해석적 좌표변환이면

$$h = a(z)dzd\bar{z} = b(w)dwd\bar{w}$$

라고 나타낼 수 있다. 이 때 $a(z) = b(w(z))|dw/dz|^2$ 이다. 이를 미분하여 보면

$$-\frac{1}{a(z)}\frac{\partial^2 \log a(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{1}{b(w)}\frac{\partial^2 \log b(w)}{\partial w \partial \overline{w}}$$

을 얻는다. 즉 곡률은 해석적 좌표에 의존하지 않는 불변개념이다.

미분계량으로 부터 거리함수를 정의하는 것과 마찬가지 방법으로 U 위의 에르미트계량 또는 준계량 h에 대하여도 U 위의 거리를 $(z, w \in U)$에 대하여 $d_h(z,w)$라고 정의할 수 있다.

예를 들면 실수 $r > 0$에 대하여 앞에서 정의한 $\Delta(r)$ 위의 포앙카레 계량

$$g = 4r^2 dzd\bar{z}/(r^2 - |z|^2)^2$$

은 원판 $\Delta(r)$ 위에서 에르미트 계량이 된다. 이 계량이 주는 거리함수가

$$d_g(z,w) = \log\frac{r + |\alpha|}{r - |\alpha|}, \quad \alpha = \frac{r^2(w - z)}{r^2 - \bar{z}w}$$

임은 앞에서 단위원반의 거리함수 계산으로부터 바로 알 수 있다. 이 계량의 가우스곡률 $K_r(z)$도 간단한 계산에 의해

$$K_r(z) = -1, \qquad z \in \Delta(r)$$

임을 알 수 있다.