여러 가지 부등식

정리 1 (젠센 부등식)**.** *구간 I 에서 볼록 함수 $f(x)$ 가 2 회 연속적으로 미분가능하면, 구간 I 의 임의의 점 $x_1, \cdots, x_n$ 과 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ 인 임의의 양수 λ_j 들에 대해서*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \tag{1}$$

이 성립한다. 위 부등식에서, $f''(x) > 0$ 인 경우, 등호는 $x_1 = \cdots = x_n$ 일 때만 성립한다.

증명(Proof). 주어진 가정에 의해서

$$t = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

이라 놓으면, t 는 I 에 속하고, 평균치 정리에 의해서 I 의 임의의 점 u 에 대해서 적당한 ζ 가 u 와 t 사이에 존재하여

$$f'(u) - f'(t) = f''(\zeta)(u - t) \tag{2}$$

가 성립한다. 가정에 의해서 $f''(x)$ 는 연속이므로, t 와 x_j 를 끝 점으로 갖는 폐구간에서 최소값을 갖는다. 그것을 m_j 로 놓고 (2) 의 양변을 $u = t$ 에서 $u = x_j$ 까지 적분하면

$$f(x_j) - f(t) - f'(t)(x_j - t) \ge \frac{1}{2} m_j (x_j - t)^2$$

이 성립함을 알 수 있다. 위 식의 양변에 λ_j 를 곱하고 $j = 1$ 에서 $j = n$ 까지 더하면

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) - f(t) \ge \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j m_j (x_j - t)^2 \tag{3}$$

을 얻는다. 볼록성에 의하여 각 m_j 는 음이 아니므로 (1) 은 (3) 의 결과이다. 한편, $f''(x) > 0$ 인 경우, 각 m_j 는 양이므로 (3) 으로부터 (1) 에서 등호가 성립하는 경우는 $x_1 = \cdots = x_n = t$ 인 경우 뿐임을 알 수 있다. □

주의 1: 젠센 부등식은 일반적으로 미분 가능성에 대한 가정 없이도 성립한다. 그러한 경우, 다음과 같이 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있다.

증명(Proof). $f(x)$ 를 구간 I 에서 볼록인 함수라고 하자. $n = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 볼록이므로

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f(x_2)$$

가 되어 성립한다. 이제 $t_1 + \cdots + t_n = 1$ 이고, $t_i \geq 0$ 이면

$$f(t_1x_1 \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) \cdots + t_nf(x_n)$$

이라고 가정하고 $n+1$ 인 경우를 생각하자. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$ 이고, $\lambda_i \geq 0$ 이라고 가정하자. 그러면, 일반성을 잃지않고 $\lambda_{n+1} < 1$ 이라 가정할 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&= (1-\lambda_{n+1})\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}f(x_n)\right] + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&\geq (1-\lambda_{n+1})f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n\right) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&\geq f(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n + \lambda_{n+1}x_{n+1})
\end{aligned}$$

이 되므로 증명이 끝난다. □

정리 2 (준가법적 부등식)**.** *실수 전체에 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 a, b 에 대해서*

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$

를 만족할 때 $f(x)$ 는 준가법적이라 불리운다.
실수 위의 증가 함수 $f(x)$ 가 $f(0) = 0$ 이고 $|f(x)| \leq c$ 이면, 함수 $c + f(x)$ 와 $c - f(x)$ 는 각각 준가법적이다. 즉, 임의의 실수 a, b 에 대해서

$$f(a+b) - c \leq f(a) + f(b) \leq f(a+b) + c$$

이다.

증명(Proof). 이것은 $a \geq b \geq 0$, $a \geq 0 \geq b$, $0 \geq a \geq b$ 인 세 경우로 나누어 생각하면 쉽게 알 수 있다. 자세한 것은 연습으로 남겨둔다. □

정리 3 (체비셰프 부등식)**.** *$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 이고 $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ 이면*

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

단, 등호는 $x_1 = \cdots = x_n$ 또는 $y_1 = \cdots = y_n$ 일 때만 성립한다.

증명(Proof). 수학적 귀납법으로 증명한다. 우선 $n = 2$ 인 경우는

$$x_1y_1 + x_2y_2 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)(y_1+y_2) = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_2-y_1) \geq 0.$$

$n > 3$ 이고 $(n-1)$ 인 경우에 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자. 편의상,

$$x = x_1 + \cdots + x_n, \qquad y = y_1 + \cdots + y_n$$

으로 놓으면 $x_n \geq x/n, y_n \geq y/n$ 이므로, 귀납법의 가정에 의해서

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{xy}{n} &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i + x_n y_n - \frac{xy}{n} \\ &\geq \frac{1}{n-1}(x - x_n)(y - y_n) + x_n y_n - \frac{xy}{n} \\ &= \frac{(nx_n - x)(ny_n - y)}{n(n-1)} \geq 0.\end{aligned}$$

등호가 성립하는 경우는 $x_n = x/n$ 또는 $y_n = y/n$ 인 경우이고, 전자의 경우엔 $x_1 = \cdots = x_n$, 후자의 경우엔 $y_1 = \cdots = y_n$ 이다. □

정리 4 (슈르 부등식)**.** *$x, y, z, n > 0$ 이면*

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-z)(y-x) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0$$

이다. 단, 등호는 $x = y = z$ 일 때만 성립한다.

주의 2: n 은 정수일 필요가 없음에 주의하라.

증명(Proof). 대칭성에 의해서 $x \geq y \geq z$ 라 가정할 수 있다 . 그러면

$$\begin{aligned}x^n(x-y)(x-z) &= x^n(x-y)^2 + x^n(x-y)(y-z), \\ y^n(y-z)(y-x) &= -y^n(y-z)(x-y), \\ z^n(z-x)(z-y) &= z^n(x-z)(y-z)\end{aligned}$$

이므로, 변변 더하면

$$\text{준식의 좌변} = x^n(x-y)^2 + (x^n - y^n)(x-y)(y-z) + z^n(x-z)(y-z) \geq 0. \quad (4)$$

위 식 (4)로부터 등호는 $x = y = z$ 일 때만 성립함을 쉽게 알 수 있다. □

정리 5 (재배열 부등식)**.** *$r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ 이고 $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$ 이라 하자. 그러면 임의의 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 의 순열 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 에 대해서*

$$r_1 s_n + \cdots + r_n s_1 \leq r_1 t_1 + \cdots + r_n t_n \leq r_1 s_1 + \cdots + r_n s_n$$

이다.

증명(Proof). 만약에 $k < m$ 이고 $t_k > t_m$ 이라 하면,

$$(r_m - r_k)(t_k - t_m) \geq 0$$

이므로

$$r_k t_k + r_m t_m \leq r_m t_k + r_k t_m$$

이다. 즉, t_k 와 t_m 의 위치를 바꿈으로써 $r_1 t_1 + \cdots + r_n t_n$ 의 값은 증가한다. 이와 같은 과정을 유한번 반복 시행하면 $r_1 t_1 + \cdots + r_n t_n$ 의 값은 $t_1 \leq \cdots \leq t_n$ 일 때 최대이다. 즉, 오른쪽 부등식이 성립한다. 같은 방법으로 왼쪽 부등식도 성립한다. □